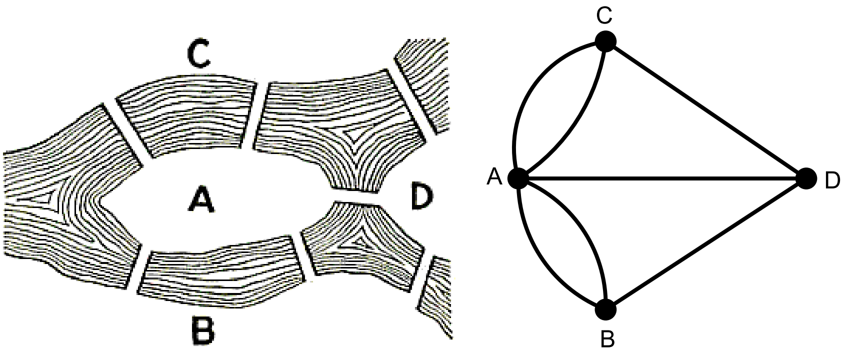
Verkkojen värittäminen

Pro gradu -tutkielma
Tiina Aaltonen
165231
Itä-Suomen yliopisto
Fysiikan ja matematiikan laitos
10. tammikuuta 2012

Sisältö

1 Johdanto

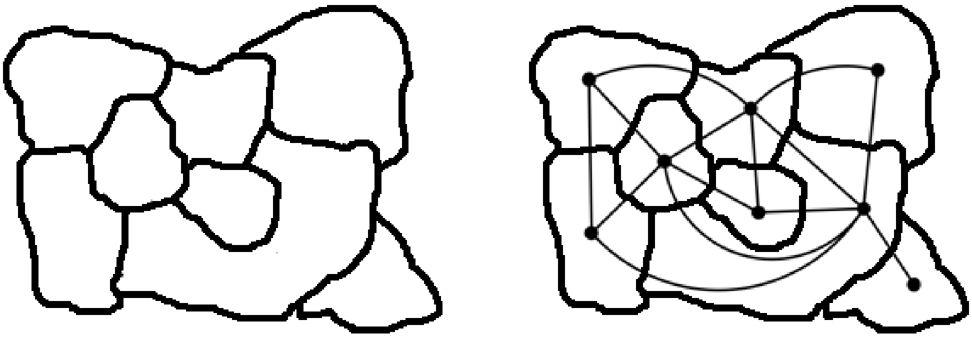
Verkkoteoria sai alkunsa, kun sveitsiläinen matemaatikko Leonhard Euler vuonna 1736 julkaisi artikkelin, joka sisälsi ratkaisun kuuluisaan Königsbergin siltaongelmaan. Königsbergin (nykyisen Kaliningradin) kaupungissa Pregel-joen ylitse kulki seitsemän siltaa. Ongelmana oli löytää kaupungin ympäri kulkeva kävelyreitti, jossa jokainen silta ylitettäisiin täsmälleen kerran. Euler havainnollisti ja yksinkertaisti ongelman tilannetta korvaamalla maa-alueet A, B, C ja D pisteillä ja maa-alueita yhdistävät sillat pisteitä yhdistävillä viivoilla (Kuva 1). Siten muodostui verkko, jonka pisteitä verkkoteorian kielellä kutsutaan nykyään solmuiksi ja viivoja kaariksi. Siltaongelmaa kuvaavan verkon avulla Euler osoitti, ettei ongelmassa etsittyä reittiä ole olemassa. Eulerin käyttämä siltaongelman ratkaisu oli kuitenkin alku verkkoteorian kehittymiselle. [3, ss. 71-72]



Kuva 1: Königsbergin siltaongelma.

Verkkoteorian osa-alueista verkkojen värittämistä pidetään yhtenä parhaiten tunnettuna ja eniten opiskeltuna osana. Aivan kuten verkkoteoria itsessään myös verkkojen värittäminen on saanut alkunsa yrityksistä ratkaista käytännönläheistä, karttojen väritykseen liittyvää, ongelmaa. Vuonna 1852 englantilainen Francis Guthrie havaitsi, että Englannin kreivikunnat voidaan värittää käyttämällä neljää väriä siten, että samaa rajaviivaa omaavat naapurikreivikunnat ovat erivärisiä. Tämä sai hänet esittämään kysymyksen, joka nykyään tunnetaan Neliväriongelmana: *Voidaanko jokaisen (todellisen tai kuvitellun) kartan maat värittää käyttämällä neljää väriä siten, että naapurimaat väritetään eri väreillä?* [3, s. 205]

Useiden eri matemaatikkojen yritykset ratkaista Neliväriongelmaa johtivat vuosien kuluessa verkkojen värittämisen määritelmien ja lauseiden kehittämiseen. Samalla Neliväriongelman ratkaisuyrityksillä oli suuri merkitys koko verkkoteorian kehitykselle. Kartan värittämisongelmasta saadaan verkon solmujen värittämisongelma, kun kartta muutetaan ensin tasoverkoksi. Kartan maa-alueita havainnollistetaan solmuilla ja yhteistä rajaviivaa omaavia alueita havainnollistetaan solmuja yhdistävillä kaarilla (Kuva 2). Solmuvärityksessä jokaiselle verkon solmulle määrätään väri siten, että vierekkäisten solmujen tulee olla eriväriset. Näin ollen verkon solmuvärityksessä vierekkäisten solmujen saadessa eri värit myös alkuperäisessä kartassa naapurimaat saavat eri värit.

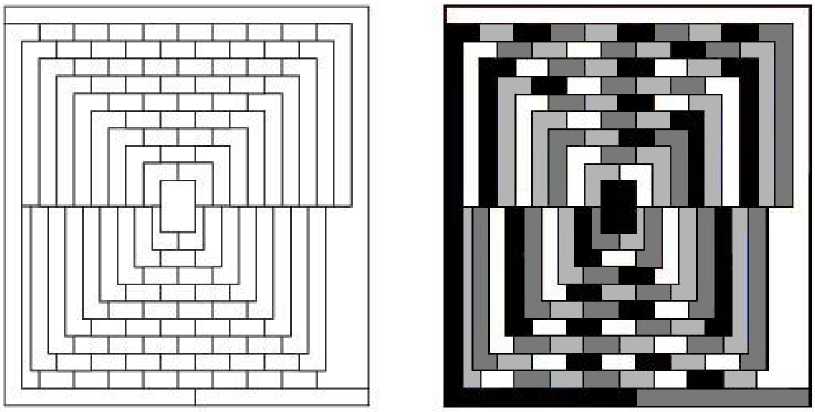


Kuva 2: Kartan muuttaminen verkoksi.

Verkon solmujen värittäminen onkin yleisin tapa värittää verkkoja. Eräs toinen tapa värittää verkkoja on määrätä värit verkon kaarille, jolloin kustakin solmusta lähtevien kaarien tulee olla eriväriset. Sekä solmu- että kaarivärityksessä ollaan usein kiinnostuneita käyttämään mahdollisimman pientä määrää värejä verkon värittämiseen. Pienten ja yksinkertaisten verkkojen tapauksessa tarvittavien värien määrä voidaan helposti päätellä; verkkojen koon kasvaessa verkkojen värittämisestä tulee kuitenkin vaikeaa. Verkkojen värittämiseen tarvittavien värien määrää voidaankin arvioida erilaisten ala- ja ylärajojen avulla. Verkkojen värittämistä voidaan soveltaa useisiin käytännönongelmiin. Erityisesti erilaiset aikataulutusongelmat ovat ratkaistavissa joko solmu- tai kaarivärityksen avulla.

Neliväriongelman ratkaisuyritykset johtivat siis verkkojen värittämisen teorian ja sovellusmahdollisuuksien kehittymiseen. Itse ratkaisun Neliväriongelmaan uskottiin löytyneen vuonna 1879, kun Alfred Kempe esitti artikkelissaan oman todistuksensa. Kuitenkin vuonna 1890 Percy Heawood osoitti Kempen olleen väärässä. Kempen todistustekniikkaa käyttäen Heawood kuitenkin todisti astetta heikomman Viisivärilauseen, jonka mukaan jokainen kartta voidaan värittää viittä väriä käyttämällä. Heawoodin todistuksen jälkeen palattiin tilanteeseen, jossa Neliväriongelma oli edelleen ratkaisematta. Kiinnostus Neliväriongelmaa kohtaan ei ratkaisuyritysten tuloksettomuudesta huolimatta lakannut. [3, ss. 205-206]

Huhtikuun ensimmäisenä päivänä vuonna 1975 aikakauslehdessä *Scientific American* julkaistiin suositun matematiikan kirjoittajan Martin Gardnerin (s. 1914) artikkeli *Six sensational discoveries that somehow have escaped public attention*. Artikkeli ällistytti ainakin hetkellisesti matemaattista yhteisöä. Artikkeli nimittäin sisälsi kartan (Kuva 3), josta Gardner ilmoitti, että se *ei* ole väritettävissä neljällä värillä. Kuitenkin useat ihmiset pystyivät värittämään kartan käyttämällä vain neljää väriä ja Gardnerin artikkeli paljastui pelkäksi aprillipilaksi. Kuvassa 3 on esitetty värittämätön ja neljällä värillä väritetty versio Gardnerin kartasta. [3, s. 23]



Kuva 3: Martin Gardnerin aprillipila kartta. [15]

Vuotta myöhemmin kesäkuussa 1976 Kenneth Appel ja Wolfgang Haken esittivät tietokoneavusteisen todistuksen Neliväriongelmaan. Todistus perustui 1936 verkon pelkistettyyn yksittäistapaukseen. Appelin ja Hakenin todistus herätti kuitenkin paljon keskustelua, sillä todistuksen tietokoneavusteista osaa ei voitu todentaa käsin ja todistuksen käsin tarkistettavaksi tarkoitettu osa oli liian pitkä ja monimutkainen. Vuonna 1996 Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour ja Robin Thomas esittivät oman tietokoneavusteisen todistuksen, joka oli idealtaan vastaava Appelin ja Hakenin todistuksen kanssa, mutta perustui ainoastaan 633 välttämättömään verkkoon. Puhdasta matemaattista todistusta Neliväriongelmaan ei ole edelleenkään löydetty. [3, ss. 24-26]

2 Verkkojen peruskäsitteitä

Verkot ovat erittäin monikäyttöisiä malleja laajan alueen käytännöllisten ongelmien tarkasteluun. Ongelmia kuvataan verkoilla, joissa on pisteitä ja pisteiden välisiä yhteyksiä kuvaavia janoja. Tässä luvussa käydään läpi verkkojen perusmääritelmiä ja tutustutaan yleisesti tunnettuihin verkkoihin.

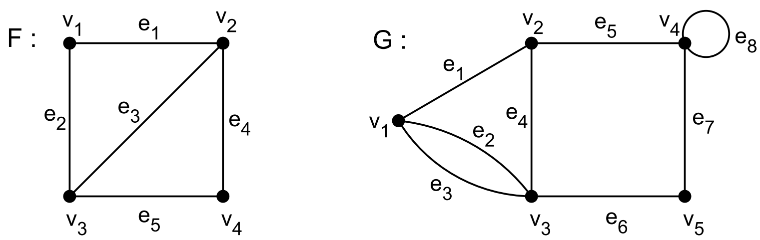
2.1 Solmu, kaari ja verkko

Verkko muodostuu kahdesta äärellisestä joukosta.

Määritelmä 2.1.1. *Verkko* $G = (V, E)$ on matemaattinen rakenne, joka koostuu kahdesta äärellisestä joukosta V ja E. Joukon V alkioita kutsutaan *solmuiksi* ja joukon E alkioita *kaariksi*. Jokainen kaari liittyy yhteen tai kahteen solmuun, joita kutsutaan kaaren *päätesolmuiksi*. [5, s. 2]

Määritelmä 2.1.2. Joukon S *mahtavuutta* eli joukon alkioiden lukumäärää merkitään $|S|$. Merkintä $|V(G)|$ tarkoittaa verkon G solmujen lukumäärää ja vastaavasti merkintä $|E(G)|$ kaarien lukumäärää. [1, s. 3]

Verkko esitetään tyypillisesti kaaviokuvana, jossa jokaista solmua edustaa piste tai pieni ympyrä ja jokaista kaarta edustaa jana tai kaariviiva liittyen pisteisiin. Verkko voidaan esittää myös luettelona sisältäen solmujen ja kaarien joukot sekä niiden välisen yhteyden.



Kuva 4: Verkkojen F ja G kaaviokuvat.

Esimerkki 2.1.3. Kuvassa 4 on verkkojen F ja G kaaviokuvat. Verkon F solmujen joukko on $V(F) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ja kaarien joukko vastaavasti $E(F) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Verkossa F kutakin kaarta voidaan merkitä myös asettamalla kaaren päätesolmut peräkkäin, sillä kaikilla kaarilla on eri päätesolmut. Tällöin $E(F) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$. Verkon G solmujen joukko on puolestaan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ja kaarien joukko

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Verkossa G on kaksi kaarta, joilla on samat päätesolmut, joten tällöin käytetään yksikäsitteisiä nimiä kaarien merkitsemiseen.

Tarkastellaan seuraavaksi verkon kahden solmun sekä kahden kaaren keskinäisiä yhteyksiä. Lisäksi määritellään silmukan, solmun asteluvun ja verkon suurimman asteen käsitteet. Havainnollistetaan seuraavaksi esitettäviä määritelmiä Esimerkissä 2.1.9.

Määritelmä 2.1.4. Kaksi solmua ovat *vierekkäisiä*, jos ne ovat saman kaaren päätesolmuja. Kaksi vierekkäistä solmua ovat toistensa *naapureita.* [5, s. 7]

Määritelmä 2.1.5. Kaksi kaarta ovat *vierekkäisiä*, jos niillä on yksi yhteinen päätesolmu. [5, s. 7]

Määritelmä 2.1.6. Kaksi kaarta ovat *rinnakkaisia*, jos niillä on yhteiset päätesolmut. [3, s. 45]

Määritelmä 2.1.7. Kaari, joka alkaa samasta solmusta ja päättyy samaan solmuun, on *silmukka.* [3, s. 45]

Määritelmä 2.1.8. Solmun v *asteluku* $\deg(v)$ verkossa G on niiden kaarien lukumäärä, joilla on päätesolmuna v, kun silmukat lasketaan kahdesti. Verkon G solmujen *suurinta astetta* merkitään $\Delta(G)$. [5, s. 7]

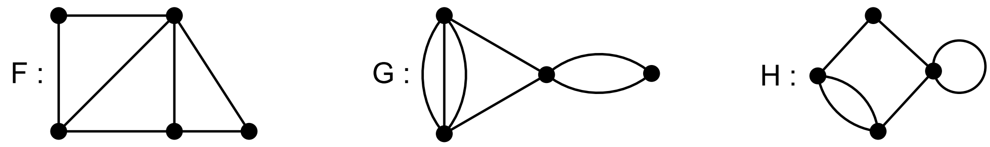
Esimerkki 2.1.9. Tarkastellaan Kuvan 4 verkkoa G. Verkon solmut v_3 ja v_5 ovat vierekkäisiä eli naapurisolmuja. Kaaret e_1 ja e_5 ovat vierekkäisiä ja kaaret e_2 ja e_3 rinnakkaisia. Kaari e_8 on silmukka, sillä se alkaa solmusta v_4 ja päättyy solmuun v_4. Solmun v_1 asteluku $\deg(v_1) = 3$ ja solmun v_4 asteluku $\deg(v_4) = 4$, joka on samalla verkon suurin aste, eli $\Delta(G) = 4$.

Verkkoja voidaan luokitella sen mukaan, onko niissä rinnakkaisia kaaria tai silmukoita.

Määritelmä 2.1.10. Verkko on *yksinkertainen*, jos siinä ei ole rinnakkaisia kaaria eikä silmukoita. [5, s. 3]

Määritelmä 2.1.11. *Multiverkossa* saa olla rinnakkaisia kaaria, mutta ei silmukoita. [5, s. 3]

Määritelmä 2.1.12. *Pseudoverkossa* saa olla rinnakkaisia kaaria ja silmukoita. [3, s. 45]



Kuva 5: Yksinkertainen, multi- ja pseudoverkko.

Jatkossa käytettäessä termiä *verkko* tarkoitetaan aina yksinkertaista verkkoa. Määritelmien mukaan jokainen multiverkko on pseudoverkko ja jokainen (yksinkertainen) verkko on sekä multiverkko että pseudoverkko. Kuvan 5 verkko F on yksinkertainen verkko, verkko G multiverkko ja verkko H pseudoverkko.

Tutkittavan verkon ominaisuudet määräytyvät usein sen sisällä olevien tietyntyyppisten pienempien verkkojen olemassaolosta. Joskus onkin tarpeellista tarkastella vain tiettyä verkon osaa. Tällöin tarvitaan aliverkon käsitettä.

Määritelmä 2.1.13. Verkko H on verkon G *aliverkko*, jos $V(H) \subseteq V(G)$ ja $E(H) \subseteq E(G)$. [3, s. 29]

2.2 Yhtenäisistä verkoista

Verkoissa on olemassa eri tyyppisiä solmujen ja kaarien jonoja, joita käytetään kuvaamaan tietä, jonka avulla voidaan liikkua verkossa solmusta toiseen solmuun. Tällaisia jonoja ovat kulku, reitti, polku ja sykli. Yhtenäinen verkko voidaan määritellä polun (tai vaihtoehtoisesti kulun) avulla.

Määritelmä 2.2.1. Verkon G *kulku* W solmusta v_0 solmuun v_n on jono

$$W = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n),$$

jossa verkon solmut ja kaaret vuorottelevat siten, että kaaren e_i päätepisteet ovat v_{i-1} ja v_i kaikilla $i = 1, \ldots, n$. [5, s. 29]

Yksinkertaisessa verkossa on vain yksi kaari kahden peräkkäisen solmun välillä, joten kulun esitystä voidaan lyhentää pelkäksi solmuista muodostuvaksi jonoksi $W = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$. Kulku W voidaan esittää myös aloitus- ja lopetussolmujen sekä käytettävien kaarien avulla $W = (v_0, e_1, e_2, \ldots, e_n, v_n)$. Yleisesti kulkua W solmusta v_0 solmuun v_n merkitään kulkuna $v_0 - v_n$.

Määritelmä 2.2.2. Kulun W *pituus* on kaarien lukumäärä kulun solmujen ja kaarien vuorottelevassa jonossa. [5, s. 29]

Määritelmä 2.2.3. *Suljettu kulku* on kulku, jolla on sama aloitus- ja lopetussolmu. *Avoin kulku* on siten kulku, jolla on eri aloitus- ja lopetussolmut. [5, s. 29]

Määritelmä 2.2.1 ei sulje pois sitä, että kulussa solmut ja kaaret voivat esiintyä useita kertoja. Kieltämällä kaarien ja solmujen toistamisen kulku voidaan sieventää ensin reitiksi ja edelleen poluksi.

Määritelmä 2.2.4. *Reitti* T on kulku, jossa mikään kaari ei esiinny useita kertoja. [5, s. 39]

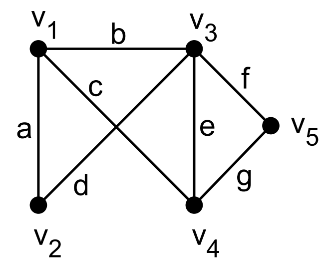
Määritelmä 2.2.5. *Polku* P on reitti, jossa mikään solmu ei esiinny useita kertoja (mahdollista aloitus- ja lopetussolmua lukuunottamatta). [5, s. 39]

Reiteille ja poluille pätevät samat merkintätavat kuin kuluille. Lisäksi Määritelmät 2.2.2 ja 2.2.3 ovat vastaavat reiteille ja poluille.

Määritelmä 2.2.6. *Sykli* C on suljettu polku. [5, s. 40]

Sykli, jonka pituus $k \geq 3$, on k-sykli. Kaikkein lyhintä sykliä, 3-sykliä, kutsutaan myös kolmioksi. Sykli, jonka pituus on parillinen, on parillinen sykli. Vastaavasti sykli, jonka pituus on pariton, on pariton sykli. [3, s. 32]

Esimerkki 2.2.7. Kuvan 6 verkossa on kulku $W = (v_2, d, b, a, d, e, g, v_5)$. Kulku W ei kuitenkaan ole reitti, sillä kaari d toistuu siinä kaksi kertaa. $T = (v_2, d, e, g, f, b, v_1)$ on reitti, mutta se ei ole polku, sillä solmu v_3 toistuu reitissä kahdesti. Polku $P = (v_1, c, g, f, d, a, v_1)$ on suljettu polku eli sykli.



Kuva 6: Esimerkin 2.2.7 verkko.

Polun käsitteen avulla voidaan määritellä yhtenäinen verkko. Määritelmässä polun $u - v$ sijaan voitaisiin yhtä hyvin käyttää kulkua $u - v$.

Määritelmä 2.2.8. Verkko G on *yhtenäinen*, jos sen minkä tahansa kahden solmun u ja v välillä on polku $u - v$. Muutoin verkko G on *epäyhtenäinen*. Epäyhtenäisen verkon yhtenäisiä osia kutsutaan *komponenteiksi*. [3, ss. 32-33]

Jos siis u ja v ovat yhtenäisen verkon G eri solmut, niin verkossa G on olemassa polku $u - v$. Itse asiassa verkossa voi olla useampia mahdollisesti eripituisia polkuja $u - v$. Määritellään yhtenäisen verkon kahden solmun välisen etäisyyden käsite.

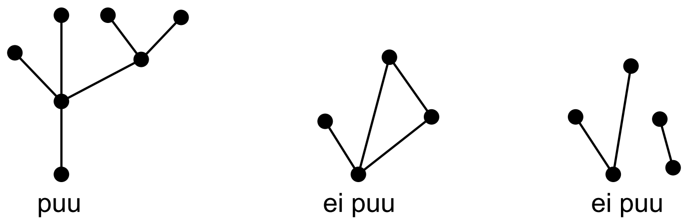
Määritelmä 2.2.9. Yhtenäisessä verkossa G solmujen u ja v välinen *etäisyys* $d(u, v)$ on verkon G lyhyimmän polun $u - v$ pituus. [3, s. 34]

Määritelmä 2.2.10. Polkua $u - v$, jonka pituus on $d(u, v)$, kutsutaan $u - v$ *geodeettiseksi*. [3, s. 34]

Seuraavaksi määriteltävä puu on esimerkki yhtenäisestä verkosta.

Määritelmä 2.2.11. Yhtenäinen syklitön verkko on *puu*. [3, s. 56]

Kuvassa 7 on puu ja kaksi verkkoa, jotka eivät ole puita. Keskimmäinen verkko ei ole puu, koska siinä on sykli. Oikeanpuoleinen verkko ei puolestaan ole puu, koska siinä on 2 komponenttia ja on siten epäyhtenäinen.



Kuva 7: Puu ja kaksi ei puuta.

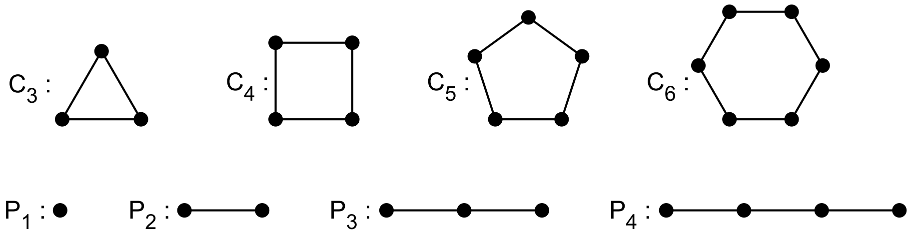
2.3 Yleisesti tunnettuja verkkoja

On olemassa tietynlaisia verkkoja, joita käytetään niin toistuvasti, että niille on käytössä omat merkintätapansa. Määritellään nyt yleisesti tunnettuja verkkoja, joita tullaan tarvitsemaan jatkossa.

Määritelmä 2.3.1. Verkkoa, joka on itsessään *sykli* ja jossa on n (≥ 3) solmua, merkitään C_n. [3, s. 39]

Määritelmä 2.3.2. Verkkoa, joka on itsessään *polku* ja jossa on n solmua, merkitään P_n. [3, s. 39]

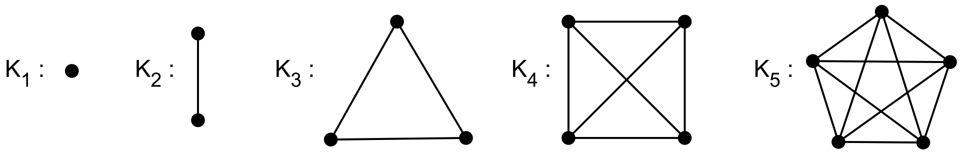
Syklissä C_n on siis n solmua ja n kaarta, kun taas polussa P_n on n solmua ja $n - 1$ kaarta. Kuvassa 8 on neljä lyhintä sykliä ja polkua.



Kuva 8: Syklejä ja polkuja.

Määritelmä 2.3.3. Verkko on *täydellinen*, jos sen jokaisesta solmusta on kaari kaikkiin muihin verkon solmuihin. Täydellistä verkkoa, jossa on n solmua, merkitään K_n. [3, s. 39]

Täydellinen verkko K_n on siis verkko, jossa on n solmua ja $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ kaarta. Täydelliset verkot $K_1 - K_5$ on esitetty Kuvassa 9.



Kuva 9: Täydellisiä verkkoja.

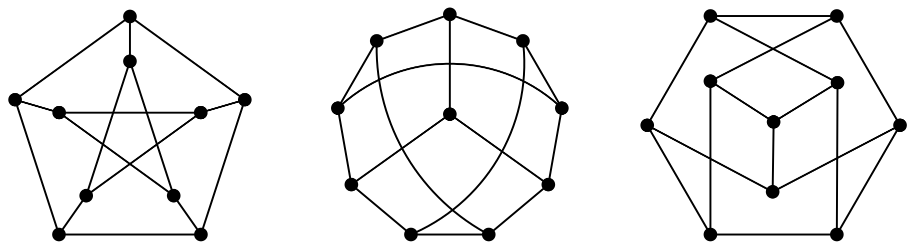
Määritelmä 2.3.4. Verkko G on *säännöllinen*, jos verkon jokaisen solmun aste on sama. Jos kaikkien solmujen aste on r, verkko G on *r-säännöllinen.* [3, s. 39]

Edellä määritellyt syklit ja täydelliset verkot ovat säännöllisiä. Sykli C_n on 2-säännöllinen, sillä jokaisesta solmusta lähtee 2 kaarta. Vastaavasti täydellinen verkko K_n on $(n-1)$-säännöllinen, sillä jokaisesta solmusta lähtee kaari kaikkiin muihin verkon solmuihin eli $(n-1)$ kaarta.

Verkoille, jotka ovat 3-säännöllisiä, on olemassa oma nimitys.

Määritelmä 2.3.5. Verkkoa, joka on 3-säännöllinen, kutsutaan *kuutiomaiseksi* verkoksi. [3, s. 40]

Esimerkiksi täydellinen verkko K_4 on kuutiomainen verkko. Parhaiten tunnettu kuutiomainen verkko on *Petersenin verkko*, joka on ylipäätään yksi parhaiten tunnetuista verkoista. Siinä on 10 solmua ja 15 kaarta. Petersenin verkko on piirretty kolmella eri tavalla Kuvassa 10. Verkossa ei ole kolmioita eikä 4-syklejä, mutta siinä on 5-syklejä.



Kuva 10: Petersenin verkon kolme esitysmuotoa. [3, s. 40]

Määritelmä 2.3.6. Verkko G on *kaksijakoinen*, jos verkon solmut voidaan jakaa kahteen osajoukkoon U ja W siten, että jokaisen kaaren toinen päätesolmu kuuluu joukkoon U ja toinen päätesolmu joukkoon W. Osajoukkoja U ja W sanotaan *jakojoukoiksi.* [3, s. 40]

Seuraava lause on tärkeä tutkittaessa tarkasteltavan verkon kaksijakoisuutta.

Lause 2.3.7. *Verkko G on kaksijakoinen jos ja vain jos se ei sisällä paritonta sykliä.*

Todistus. Oletetaan ensin, että verkko G on kaksijakoinen. Silloin $V(G)$ voidaan jakaa jakojoukkoihin U ja W, jolloin jokainen verkon G kaari yhdistää joukon U solmun joukon W solmuun. Olkoon $C = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$ verkon G k-sykli. Voidaan olettaa, että $v_1 \in U$. Täten $v_2 \in W$, $v_3 \in U$ ja niin edelleen. Eritoten $v_i \in U$ jokaisella parittomalla kokonaisluvulla i $(1 \leq i \leq k)$ ja $v_j \in W$ jokaisella parillisella kokonaisluvulla j $(2 \leq j \leq k)$. Koska $v_1 \in U$, siitä seuraa, että $v_k \in W$. Näin ollen k on parillinen ja siten kaksijakoinen verkko ei sisällä paritonta sykliä.

Oletetaan seuraavaksi, että verkko G ei sisällä paritonta sykliä. Riittää osoittaa, että jokainen verkon G komponentti on kaksijakoinen ja siten voidaan olettaa, että verkko G itsessään on yhtenäinen. Olkoon u verkon G solmu ja olkoon

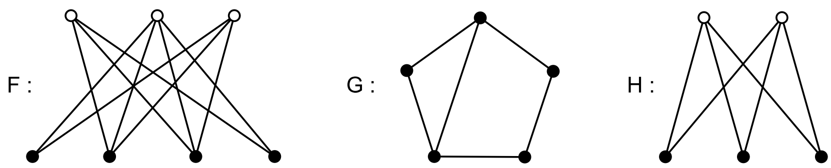
$$\begin{aligned} U &= \{x \in V(G) : d(u,x) \text{ on parillinen}\} \\ W &= \{x \in V(G) : d(u,x) \text{ on pariton}\}, \end{aligned}$$

jossa $u \in U$. Osoitetaan, että verkko G on kaksijakoinen verkko, jonka jakojoukot ovat U ja W. Riittää osoittaa, että kaksi joukon U solmua eivät ole vierekkäisiä ja että kaksi joukon W solmua eivät ole vierekkäisiä. Oletetaan, että W sisältää kaksi vierekkäistä solmua w_1 ja w_2. Olkoon polku P_1 $u - w_1$ geodeettinen ja P_2 $u - w_2$ geodeettinen. Olkoon z viimeinen solmu, joka on yhteinen poluille P_1 ja P_2 (mahdollisesti $z = u$). Silloin polun P_1 alipolun P_1'

$z - w_1$ pituus ja polun P_2 alipolun P_2' $z - w_2$ pituus ovat samaa pariteettia. Siten polut P_1' ja P_2' yhdessä kaaren w_1w_2 kanssa muodostavat parittoman syklin, mikä on ristiriita. Vastaavasti voitaisiin todistaa, että joukossa U ei ole kahta vierekkäistä solmua. [3, ss. 40-41]. $\square$

Määritelmä 2.3.8. Kaksijakoinen verkko, jonka jakojoukot ovat U ja W, on *täydellinen kaksijakoinen verkko*, jos jokainen joukon U solmu on viereinen jokaiselle joukon W solmulle. Jos jakojoukoissa U ja W on s ja t solmua, verkkoa merkitään $K_{s,t}$ tai $K_{t,s}$. [3, s. 41]

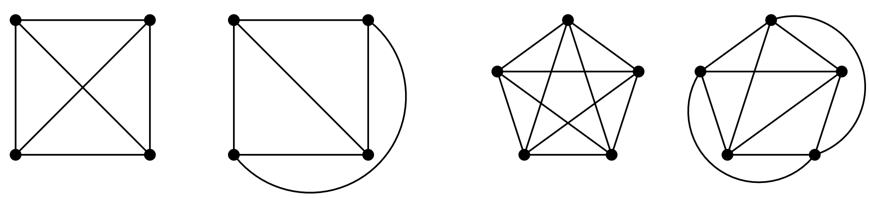
Kuvan 11 verkko F on kaksijakoinen. Kolme ylintä valkoista solmua ja neljä alinta mustaa solmua muodostavat verkon F jakojoukot. Verkko G ei ole kaksijakoinen, sillä se sisältää parittomat syklit C_3 ja C_5. Verkko H puolestaan on täydellinen kaksijakoinen verkko $K_{2,3}$.



Kuva 11: Kaksijakoiset verkot F ja H ja verkko G, joka ei ole kaksijakoinen.

Määritelmä 2.3.9. Verkko on *tasoverkko*, jos se voidaan esittää tasossa siten, että verkon kaaret eivät leikkaa toisiaan. Muutoin verkko on *avaruusverkko.* [3, s. 111]

Esimerkki 2.3.10. Täydellinen verkko K_4 voidaan Kuvan 12 mukaisesti tavallisesta esitysmuodosta poiketen piirtää tasoon siten, etteivät sen kaaret leikkaa toisiaan. Täydellinen verkko K_4 on siis tasoverkko. Täydellistä verkkoa K_5 ei voi esittää tasossa vastaavalla tavalla, joten se on avaruusverkko.



Kuva 12: Tasoverkko K_4 ja avaruusverkko K_5.

3 Solmujen värittäminen

Yleisin tapa värittää verkkoja on määrätä värit verkon solmuille. Useimmiten tarkoituksena on värittää verkon solmut siten, että kahdella vierekkäisellä solmulla ei ole samaa väriä. Tässä luvussa tarkastellaan verkon värittämiseen tarvittavaa pienintä värien määrää. Lisäksi tutustutaan solmujen listaväritykseen sekä tarkastellaan solmuväritysten sovellusmahdollisuuksia.

3.1 Määritelmiä

Määritellään aluksi solmujen värittämisen peruskäsitteitä. Värityksissä todellisia värejä (kuten sininen, punainen, vihreä ja keltainen) käytetään vain, kun käytetään pientä määrää värejä. Yleensä värejä merkitään positiivisilla kokonaisluvuilla $1, 2, \ldots, k$, sillä usein ollaan kiinnostuneita käytettyjen värien määrästä. [3, ss. 147-148]

Määritelmä 3.1.1. Verkon G *solmuvärityksessä* verkon solmuille määrätään värit, yksi väri kullekin solmulle. Verkon G *k-solmuväritystä* voidaan kuvata funktiolla $c : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ solmujen joukosta käytettävien värien joukkoon. [5, s. 372]

Määritelmä 3.1.2. Verkko on *aidosti solmuväritetty*, jos verkon vierekkäiset solmut on väritetty eri väreillä. [5, s. 372]

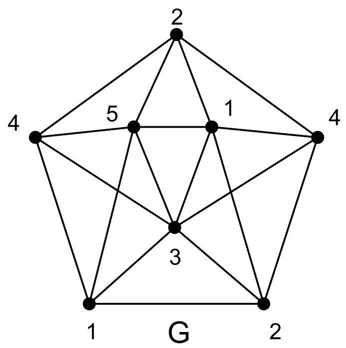
Määritelmä 3.1.3. Verkon sanotaan olevan *k-solmuväritettävä*, jos sillä on aito k-solmuväritys. [5, s. 372]

Kun verkon aitoa väritystä ajatellaan funktiona, niin $c(u) \neq c(v)$, jos solmut u ja v ovat vierekkäiset. Aito solmuväritys on yleisin tapa värittää solmuja. Joten kun jatkossa käytetään nimitystä solmuväritys, tarkoitetaan aitoa solmuväritystä, jollei toisin mainita.

Esimerkki 3.1.4. Kuvassa 13 on verkko G ja sen 5-solmuväritys. Jokaiselle solmulle on asetettu väri, eikä millään kahdella vierekkäisellä solmulla ole samaa väriä. Verkko G on siis 5-solmuväritettävä, koska sillä on aito 5-solmuväritys.

Useimmissa sovelluksissa, joissa käytetään solmuväritystä, ollaan kiinnostuneita käyttämään vähimmäismäärää värejä verkon värittämiseen. Määritellään kromaattisen luvun käsite.

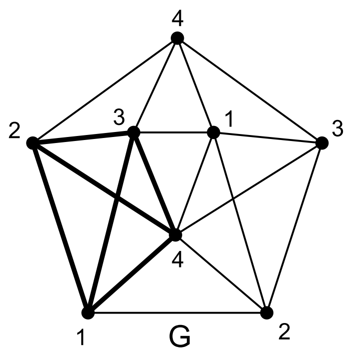
Määritelmä 3.1.5. Verkon G *kromaattinen luku* $\chi(G)$ on pienin positiivinen kokonaisluku k, jolla verkko G on k-solmuväritettävä. Verkko G on *k-kromaattinen*, jos $\chi(G) = k$. [3, s. 148]



Kuva 13: Aidosti 5-solmuväritetty verkko G.

Näin ollen $\chi(G) = k$, jos verkko G on k-väritettävä, mutta ei $(k-1)$-väritettävä. Jos on annettu k-kromaattisen verkon k-solmuväritys, niin kaikki k väriä tarvitaan verkon aitoon väritykseen. Yleensä voidaan osoittaa verkon kromaattisen luvun olevan k näyttämällä, että on olemassa verkon G k-solmuväritys (ja siten $\chi(G) \leq k$) ja että jokainen verkon G solmuväritys vaatii vähintään k väriä (ja siten $\chi(G) \geq k$). [3, ss. 148-149]

Esimerkki 3.1.6. Jatketaan Esimerkin 3.1.4 verkon G tarkastelua. Kuvassa 14 on esitetty verkon 4-solmuväritys, joten $\chi(G) \leq 4$. Verkko G sisältää kaksi täydellistä verkkoa K_4, joissa on neljä keskenään vierekkäistä solmua. Esimerkiksi lihavoitu aliverkko K_4 osoittaa, että $\chi(G) \geq 4$. Siten verkon kromaattinen luku $\chi(G) = 4$. [5, s. 383, tehtävä 9.1.7]



Kuva 14: Esimerkin 3.1.6 verkko G on 4-kromaattinen.

Verkon solmuväritys jakaa verkon solmut väriluokkiin. Kukin väriluokka muodostuu verkon kaikista tietynvärisistä solmuista.

Määritelmä 3.1.7. Solmujen joukon $V(G)$ epätyhjät joukot $V_1, V_2, \dots, V_k$ ovat verkolle G annetun k-solmuvärityksen *väriluokat.* Verkon k-solmuväritys on tehty käyttämällä värejä $1, 2, \dots, k$ ja joukko V_i $(1 \leq i \leq k)$ muodostuu niistä verkon solmuista, jotka on väritetty värillä i. [3, s. 148]

Määritelmä 3.1.8. Verkon G solmujen joukko U on *riippumaton*, jos mitkä tahansa kaksi joukon U solmua eivät ole vierekkäiset. [3, s. 98]

Koska verkon kahdella vierekkäisellä solmulla ei saa olla samaa väriä, jokainen epätyhjä väriluokka V_i muodostuu riippumatomien solmujen joukosta. Itse asiassa verkon G kromaattinen luku on pienin määrä riippumattomien solmujen joukkoja, johon $V(G)$ voidaan jakaa. [3, s. 148]

Verkkojen solmuväritysten tutkiminen rajataan tavanomaisesti yksinkertaisiin verkkoihin. Verkkoa, jossa on silmukka, ei voida värittää, sillä silmukan päätesolmu on vierekkäinen itselleen. Lisäksi verkon rinnakkaisilla kaarilla ei ole suurempaa vaikutusta päätesolmujen väreihin kuin yhdellä yksittäisellä kaarella. [5, s. 373]

3.2 Kromaattisen luvun rajoista

Yleensä verkon kromaattisen luvun ratkaiseminen on vaikeaa. Pienten ja tunnettujen verkkojen kromaattisen luvun päätteleminen voi olla melko helppoa, mutta isompien verkkojen tapauksessa mahdollisuuksien suuri määrä tekee kromaattisen luvun ratkaisemisesta vaikeaa. Verkon kromaattiselle luvulle ei siis ole olemassa yleistä kaavaa. Näin ollen täytyy tyytyä joko päättelemään tietyn verkon kromaattinen luku tai päättelemään verkon kromaattisen luvun ylä- ja/tai alaraja. Seuraavaksi tarkastellaan eräitä kromaattisen luvun rajoja. [7, s. 47]

Melko ilmeinen, mutta usein käyttökelpoinen, verkon kromaattisen luvun alaraja saadaan hyödyntämällä verkon aliverkon kromaattista lukua.

Lause 3.2.1. *Jos H on verkon G aliverkko, niin $\chi(H) \leq \chi(G)$.*

Todistus. Oletetaan, että verkon G kromaattinen luku $\chi(G) = k$. Verkolla G on silloin olemassa k-solmuväritys c. Koska väritys c määrää eri värit verkon G vierekkäisille solmuille, määrää se eri värit myös verkon H vierekkäisille solmuille. Näin ollen verkko H on k-väritettävä ja siten $\chi(H) \leq k = \chi(G)$. [3, s. 149] $\square$

Määritelmä 3.2.2. Verkon G täydellinen aliverkko on *klikki.* Verkon G suurimman klikin solmujen lukumäärää kutsutaan *klikkiluvuksi* ja sitä merkitään $\omega(G)$. [3, ss. 98-99]

Verkon täydellisen aliverkon eli klikin avulla saadaan arvioitua kromaattisen luvun alarajaa. Seuraava tulos on suora seuraus Lauseesta 3.2.1.

Seuraus 3.2.3. *Jokaiselle verkolle G pätee $\chi(G) \geq \omega(G)$.* [3, s. 149]

Määritellään seuraavaksi verkon riippumaton solmuluku, jonka avulla saadaan kaksi olennaista rajaa kromaattiselle luvulle. Erityisesti riippumattoman solmuluvun avulla saatava alaraja on käyttökelpoinen.

Määritelmä 3.2.4. Suurinta solmujen määrää verkon G solmujen riippumattomassa joukossa kutsutaan *riippumattomaksi solmuluvuksi* ja sitä merkitään $\alpha(G)$. [3, s. 98]

Lause 3.2.5. *Jos verkossa G on n solmua, niin*

$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1.$$

Todistus. Oletetaan, että verkon G kromaattinen luku $\chi(G) = k$. Olkoon annettu verkon k-solmuväritys, joka sisältää väriluokat $V_1, V_2, \ldots, V_k$. Näin ollen $|V_i| \leq \alpha(G)$ kaikilla i $(1 \leq i \leq k)$. Koska

$$n = |V(G)| = \sum_{i=1}^{k} |V_i| \leq k\alpha(G),$$

oletuksesta ja jakamalla termillä $\alpha(G)$ saadaan alaraja

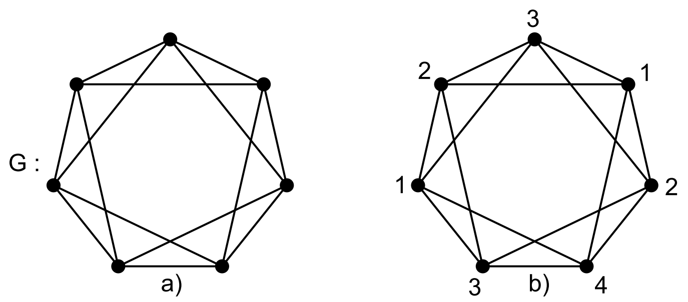
$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G).$$

Seuraavaksi olkoon U verkon G suurin solmujen riippumaton joukko ja asetetaan väri 1 jokaiseen joukon U solmuun. Asetetaan väristä 1 poikkeavat (eri) värit kaikille solmuille $V(G) - U$, jolloin muodostuu verkon G aito väritys. Siten saadaan

$$\chi(G) \leq |V(G) - U| + 1 = n - \alpha(G) + 1. \text{ [3, s. 152]}$$

$\square$

Esimerkki 3.2.6. Kuvan 15 a) verkossa G on 7 solmua. Verkon klikkiluku $\omega(G) = 3$ ja riippumaton solmuluku $\alpha(G) = 2$. Seurauksen 3.2.3 mukaan $\chi(G) \geq 3$, kun taas Lauseen 3.2.5 mukaan $\frac{7}{2} \leq \chi(G) \leq 6$ ja siten edelleen $4 \leq \chi(G) \leq 6$. Kuitenkin Kuvan 15 b) verkon 4-solmuväritys osoittaa, että $\chi(G) \leq 4$ ja siten kromaattinen luku $\chi(G) = 4$. [5, s. 383, tehtävä 9.1.8]



Kuva 15: 4-kromaattinen verkko G, jolle $\omega(G) = 3$ ja $\alpha(G) = 2$.

Jos verkossa G on n solmua, niin ilmiselvä yläraja kromaattiselle luvulle $\chi(G)$ on n, sillä verkon n-väritys on aina mahdollinen. Tämä raja on tarkka täydellisille verkoille, sillä niiden värittämiseen tarvitaan aina yhtä monta väriä kuin täydellisessä verkossa on solmuja. Itseasiassa täydelliset verkot ovat ainoita verkkoja, joille tämä raja on tarkka. Lauseen 3.2.7 yläraja pätee siis kaikille verkoille, mutta siitä ei ole apua verkon kromaattisen luvun päättelemiseen.

Lause 3.2.7. *Jokaiselle verkolle G, jossa on n solmua, $\chi(G) \leq n$.* [7, s. 47]

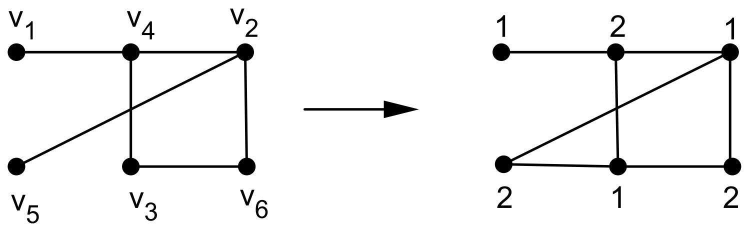
Tutustutaan *greedy algoritmiin*, joka on olennainen verkon värityksissä käytettävä algoritmi. Väritetään verkko, jossa on n solmua, käyttäen tätä algoritmia. Ensin listataan verkon solmut järjestykseen merkitsemällä niitä $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Vastaavasti järjestetään käytettävissä olevat värit ja merkitään niitä positiivisilla kokonaisluvuilla $1, 2, \ldots, n$. Väritetään verkko seuraavalla tavalla:

1. Asetetaan väri 1 solmulle v_1.

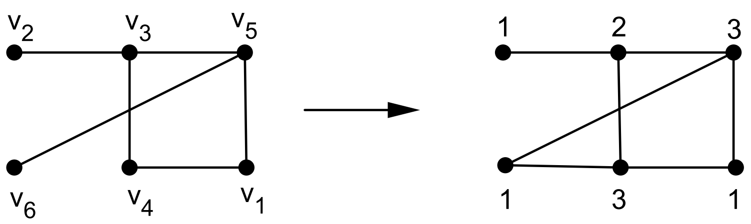
2. Jos solmut v_1 ja v_2 ovat vierekkäiset, asetetaan väri 2 solmulle v_2; muuten käytetään uudelleen väriä 1.

3. Väritetään loput solmut järjestyksessä. Kun väritetään solmua v_i, käytetään pienintä käytettävissä olevaa väriä, jota ei ole käytetty solmun v_i aikaisemmin väritettyihin naapurisolmuihin. [7, s. 47]

Esimerkki 3.2.8. Kuvassa 16 on erään verkon greedy algoritmin mukainen väritys. Vasemmalla olevalle verkolle saadaan greedy algoritmilla oikealla oleva väritys. Ensin solmulle v_1 asetetaan väri 1. Sitten solmulle v_2 asetetaan väri 1, koska v_2 ei ole viereinen solmulle v_1. Solmulle v_3 asetetaan myös väri 1, koska se ei ole viereinen solmuille v_1 ja v_2. Solmulle v_4 on asetettava väri 2, sillä se on viereinen aikaisemmin värillä 1 väritetyille solmuille. Vastaavasti solmulle v_5 asetetaan väri 2 ja viimeisenä solmulle v_6 väri 2. Verkon värittämiseen tarvitaan siis 2 väriä. [7, s. 47]



Kuva 16: Greedy algoritmin soveltaminen.



Kuva 17: Algoritmin soveltaminen uudelleen.

On huomattava, että greedy algoritmilla saatu verkon väritys riippuu voimakkaasti solmuille alunperin valittavasta järjestyksestä. Solmujen eri järjestykset voivat tuottaa ja usein tuottavat erilaisia värityksiä. Kuvassa 17 on Esimerkin 3.2.8 verkko, jossa solmuilla on erilainen järjestys. Nyt greedy algoritmilla saatu verkon väritys vaatii 2 värin sijaan 3 väriä. Greedy algoritmi antaa siis aina verkon aidon värityksen, mutta ei voida olettaa, että se antaisi värityksen, jossa käytetään pienintä mahdollista värien määrää. [7, ss. 47-48]

Lause 3.2.9. *Jokaiselle verkolle G*

$$\chi(G) \leq 1 + \Delta(G).$$

Todistus. Oletetaan, että verkkoon G on sovellettu greedy algoritmia, kun solmut on listattu järjestykseen $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Silloin solmulle v_1 on asetettu väri 1. Solmulle v_i $(2 \leq i \leq n)$ on asetettu joko väri 1 tai väri $k+1$, jossa k on suurin kokonaisluku siten, että kaikki värit $1, 2, \ldots, k$ on käytetty värittämään solmun v_i naapurit joukossa $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$. Koska korkeintaan $\deg(v_i)$ solmun v_i naapuria kuuluu joukkoon S, luvun k suurin arvo on $\deg(v_i)$. Näin ollen solmulle v_i asetettu väri on korkeintaan $1 + \deg(v_i)$. Joten

$$\chi(G) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{1 + \deg(v_i)\} = 1 + \Delta(G),$$

mikä haluttiin osoittaa. [3, s. 182] □

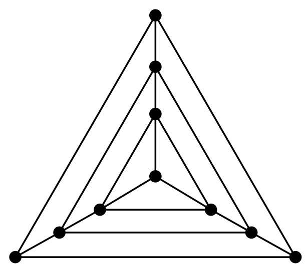
Lauseen 3.2.9 yhtäsuuruus on voimassa, kun verkko on täydellinen tai verkko on sykli, jossa on pariton määrä solmuja. Kromaattisen luvun ylärajaksi saadaan hieman vahvempi lause, jonka Leonard Brooks todisti vuonna 1941 [17, s. 237].

Lause 3.2.10 (**Brooksin lause**). *Jos verkko G on yhtenäinen, eikä se ole pariton sykli eikä täydellinen verkko, niin*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Todistus. Todistus löytyy esimerkiksi kirjasta [7, ss. 48-50]. □

Esimerkki 3.2.11. Tarkastellaan Brooksin lauseen 3.2.10 avulla Kuvan 18 verkkoa G. Koska verkko G pitää sisällään täydellisen verkon K_4, havaitaan, että kromaattinen luku $\chi(G) \geq 4$. Toisaalta verkko G toteuttaa Brooksin lauseen ehdot ja $\Delta(G) = 4$, joten $\chi(G) \leq 4$. Siten verkon G kromaattinen luku $\chi(G) = 4$. [17, s. 237]



Kuva 18: Verkko G, johon voidaan soveltaa Brooksin lausetta.

Toisin kuin Esimerkin 3.2.11 tapauksessa Brooksin lause ei aina anna tyydyttävää tulosta. Jos verkko G sisältää muutaman solmun, joilla on korkea asteluku, niin Brooksin lauseen antama raja voi olla todella heikko. Esimerkiksi jos G on kaksijakoinen verkko $K_{1,100}$, jossa ainoat kaaret lähtevät yhdestä solmusta sataan muuhun solmuun, niin verkon kromaattinen luku

$\chi(G) = 2$. Brooksin lause antaisi verkolle ylärajan $\chi(G) \leq 100$, joka on kaukana todellisesta kromaattisesta luvusta. [17, s. 237]

Tarkastellaan vielä joidenkin yleisesti tunnettujen verkkojen kromaattisia lukuja, joita on kerätty Taulukkoon 1.

Taulukko 1: Tunnettujen verkkojen kromaattisia lukuja.

Verkko G	$\chi(G)$
triviaali verkko	1
kaksijakoinen verkko	2
polku P_n	2
parillinen sykli C_n	2
pariton sykli C_n	3
puu T	2
täydellinen verkko K_n	n

Verkon kromaattinen luku $\chi(G) = 1$ jos ja vain jos verkossa G ei ole kaaria. Verkossa kaaren päätepisteet on väritettävä eri väreillä. Joten jos verkossa on kaari, niin tarvitaan vähintään 2 väriä verkon värittämiseen. Triviaalit verkot ovat näin ollen ainoita verkkoja, joiden kromaattinen luku $\chi(G) = 1$. [5, s. 377]

Kaksijakoisen verkon G kromaattinen luku $\chi(G) = 2$, ellei verkko ole kaareton. Kaksijakoisen verkon 2-solmuväritys saadaan asettamalla ensimmäinen väri toisen jakojoukon jokaiseen solmuun ja toinen väri toisen jakojoukon jokaiseen solmuun. Polut P_n, puut T ja parilliset syklit C_n ovat kaksijakoisia verkkoja, joten niiden kromaattinen luku $\chi(G) = 2$. Lauseesta 2.3.7 puolestaan seuraa, että parittomien syklien C_n kromaattinen luku $\chi(G) = 3$. [5, ss. 377-378]

3.3 Listaväritys

Viimeisinä vuosikymmeninä verkkojen väritykset, joissa jokaisen solmun väri valitaan määrätystä sallittujen värien listasta, ovat herättäneet paljon kiinnostusta. Listavärityksen käsitteen esittelivät toisistaan riippumatta ensimmäisen kerran Vadim Vizing vuonna 1976 ja Paul Erdős, Arthur L. Rubin ja Herbert Taylor vuonna 1979. Määritellään listaväritykseen liittyviä peruskäsitteitä ja tutustutaan lähinnä erilaisten kaksijakoisten verkkojen listavärityksiin. [3, s. 230]

Määritelmä 3.3.1. Joukko $L(v)$ on solmuun v liittyvä *värilista.* [3, s. 230]

Määritelmä 3.3.2. Verkon G *listaväritys* on aito solmuväritys c siten, että $c(v) \in L(v)$ kaikilla $v \in V(G)$. [3, s. 230]

Listavärityksessä jokaiseen solmuun liitetään siis yksi väri solmun omasta värilistasta siten, että verkon vierekkäiset solmut saavat eri värit. Eri solmujen värilistat voivat olla keskenään samanlaisia tai ne voivat sisältää värejä, joita ei ole osassa tai kaikissa muissa värilistoissa. Solmujen värilistat voivat olla toisistaan täysin poikkeavat, jolloin kyseisillä solmujen värilistoilla verkolla on aina aito listaväritys.

Määritelmä 3.3.3. Jos $\mathfrak{L} = \{L(v) : v \in V(G)\}$ on verkon G solmujen värilistojen joukko ja on olemassa listaväritys tällä värilistojen joukolla $\mathfrak{L}$, niin verkko G on *$\mathfrak{L}$-listaväritettävä* (tai *$\mathfrak{L}$-valittava*). [3, s. 230]

Määritelmä 3.3.4. Verkko G on *k-listaväritettävä* (tai *k-valittava*), jos se on $\mathfrak{L}$-listaväritettävä kaikilla listojen $L(v)$ kokoelmilla $\mathfrak{L}$ siten, että $|L(v)| \geq k$ jokaiselle solmulle v. [3, s. 230]

Verkko on siis k-listaväritettävä, jos sillä on aito listaväritys huolimatta siitä, miten kunkin solmun k-kokoinen värilista valitaan. Tarkasteltaessa sitä, onko tietty verkko k-listaväritettävä, riittää tutkia tapauksia, joissa solmujen värilistat eivät ole toisistaan täysin poikkeavat. Listavärityksessä ollaan kiinnostuneita pienimmästä mahdollisesta kokonaisluvusta k.

Määritelmä 3.3.5. Verkon G *kromaattinen listaluku* $\chi_\ell(G)$ on pienin positiivinen kokonaisluku k siten, että G on k-listaväritettävä. [3, s. 230]

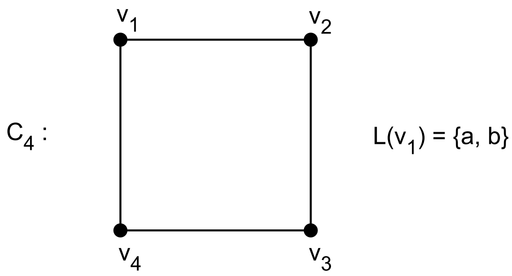
On selvää, että $\chi_\ell(G) \geq \chi(G)$ jokaiselle verkolle G, sillä $\chi(G)$ on pienin kokonaisluku k siten, että verkolla G on $\mathfrak{L}$-listaväritys, kun $|L(v)| = k$ kaikilla $v \in V(G)$ [1, s. 161]. Oletetaan, että G on verkko, jolle $\Delta(G) = \Delta$. Jos värilista $L(v) = \{1, 2, \ldots, \Delta, 1 + \Delta\}$ jokaiselle verkon G solmulle v, niin näillä värilistoilla verkolla G on listaväritys. Jos $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ on verkon G solmujen joukko ja $\mathfrak{L} = \{L(v_i) : 1 \leq i \leq n\}$ on verkon G värilistojen kokoelma, jossa jokainen joukko $L(v_i)$ muodostuu mistä tahansa $1{+}\Delta$ väristä, niin greedy algoritmin mukainen verkon G väritys tuottaa aidon värityksen. Siten G on $(1 + \Delta)$-listaväritettävä ja edelleen $\chi_\ell(G) \leq 1 + \Delta(G)$. Saadaan siis

$$\chi(G) \leq \chi_\ell(G) \leq 1 + \Delta(G)$$

kaikille verkoille G. [3, ss. 230-231]

Tarkastellaan seuraavaksi tarkemmin syklin C_4 sekä muiden kaksijakoisten verkkojen listaväritystä.

Esimerkki 3.3.6. Tutkitaan Kuvan 19 syklin C_4 listaväritystä. Ensinnäkin $\chi(C_4) = 2$, joten $\chi_\ell(C_4) \geq 2$. Oletetaan, että on annettu mitkä tahansa neljä värilistaa $L(v_i)$ $(1 \leq i \leq 4)$, joille $|L(v_i)| = 2$ Olkoon $L(v_1) = \{a, b\}$. Tarkastellaan kolmea tapausta, jotka todistavat syklin C_4 olevan 2-listaväritettävä.



Kuva 19: Verkko C_4 on 2-listaväritettävä.

Tapaus 1. $a \in L(v_2) \cap L(v_4)$. Tässä tapauksessa asetetaan solmulle v_1 väri b ja solmuille v_2 ja v_4 väri a. Värilistassa $L(v_3)$ on vähintään yksi väri, joka ei ole a. Määräämällä kyseinen väri solmulle v_3 saadaan syklin C_4 listaväritys tällä värilistojen kokoelmalla.

Tapaus 2. Väri a *kuuluu täsmälleen toiseen värilistoista* $L(v_2)$ *ja* $L(v_4)$. *Sovitaan, että* a *kuuluu listaan* $L(v_2)$ *eli* $a \in L(v_2) \setminus L(v_4)$. Jos on väri $x \in L(v_2) \cap L(v_4)$, niin asetetaan väri x solmuille v_2 ja v_4 ja väri a solmulle v_1. Värilistassa $L(v_3)$ on vähintään yksi väri, joka ei ole x. Asetetaan kyseinen väri solmulle v_3. Näin ollen verkolla C_4 on listaväritys tällä listojen kokoelmalla. Seuraavaksi oletetaan, että ei ole väriä, joka kuuluu molempiin värilistoihin $L(v_2)$ ja $L(v_4)$. Jos $a \in L(v_3)$, niin asetetaan väri a solmuihin v_1 ja v_3. Tällöin on käytettävissä olevat värit sekä solmulle v_2 että solmulle v_4. Jos $a \notin L(v_3)$, niin asetetaan solmulle v_1 väri a ja solmulle v_2 väri y listasta $L(v_2)$, joka ei ole a. Edelleen solmulle v_3 asetetaan mikä tahansa väri z listasta $L(v_3)$, joka ei ole väri y. Viimeisenä asetetaan solmulle v_4 mikä tahansa väri listasta $L(v_4)$, joka ei ole väri z eikä väri a. Tämä väri on olemassa listassa $L(v_4)$, sillä lista ei oletuksen mukaan sisällä väriä a. Näin ollen saadaan verkon C_4 listaväritys.

Tapaus 3. $a \notin L(v_2) \cup L(v_4)$. Määrätään solmulle v_1 väri a ja solmulle v_3 mikä tahansa väri listasta $L(v_3)$. Näin ollen listoissa $L(v_2)$ ja $L(v_4)$ on käytettävissä olevat värit, jotka voidaan asettaa solmuille v_2 ja v_4. Siksi verkolla C_4 on listaväritys tällä värilistojen kokoelmalla. [3, s. 231]

Itse asiassa $\chi_\ell(C_n) = 2$ kaikilla parillisilla kokonaisluvuilla $n \geq 4$. Ennen kuin osoitetaan jokaisen parillisen syklin olevan 2-listaväritettävä, osoitetaan, että jokaiselle puulle T $\chi_\ell(T) = 2$.

Lause 3.3.7. *Jokainen puu on 2-listaväritettävä. Lisäksi puulla T, jossa on solmu u ja jolla on 2-kokoisten värilistojen kokoelma $\mathfrak{L} = \{L(v) : v \in V(T)\}$, missä $a \in L(u)$, on olemassa $\mathfrak{L}$-listaväritys, jossa u on väritetty värillä a.*

Todistus. Todistetaan lause induktiolla puun solmujen lukumäärän suhteen. Tulos on ilmeinen, kun puu on suuruusluokkaa 1 tai 2. Oletetaan, että lause on tosi kaikille puille, joissa on k solmua, kun $k \geq 2$. Olkoon T puu, jossa on $k + 1$ solmua, ja olkoon

$$\mathfrak{L} = \{L(v) : v \in V(T)\}$$

2-kokoisten värilistojen kokoelma. Olkoon $u \in V(T)$ ja oletetaan, että $a \in L(u)$. Olkoon x puun T päätesolmu siten, että $x \neq u$ ja olkoon

$$\mathfrak{L}' = \{L(v) : v \in V(T - x)\}.$$

Olkoon y solmun x naapurisolmu puussa T. Induktio-oletuksesta seuraa, että on olemassa puun $T - x$ $\mathfrak{L}'$-listaväritys c', jossa solmu u on väritetty värillä a. Olkoon nyt $b \in L(x)$ siten, että $b \neq c'(y)$. Tällöin väritys c, joka on määritelty

$$c(v) = \begin{cases} b & \text{jos } v = x \\ c'(v) & \text{jos } v \neq x, \end{cases}$$

on puun T $\mathfrak{L}$-listaväritys, jossa solmu u on väritetty värillä a. [3, ss. 231-232]

□

Lause 3.3.8. *Jokainen parillinen sykli on 2-listaväritettävä.*

Todistus. Esimerkissä 3.3.6 todistettiin, että sykli C_4 on 2-listaväritettävä. Olkoon C_n n-sykli, jossa solmujen lukumäärä $n \geq 6$ on parillinen. Oletetaan, että $C_n = (v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$. Olkoon annettu syklin C_n solmujen 2-kokoisten värilistojen kokoelma $\mathfrak{L} = \{L(v_i) : 1 \leq i \leq n\}$. Osoitetaan, että C_n on $\mathfrak{L}$-listaväritettävä. Tarkastellaan kahta tapausta.

Tapaus 1. Kaikki värilistat ovat samanlaiset, $L(v_i) = \{1, 2\}$ kaikilla $1 \leq i \leq n$. Jos asetetaan väri 1 solmuun v_i, kun i on pariton, ja asetetaan väri 2 solmuun v_i, kun i on parillinen, niin C_n on $\mathfrak{L}$-listaväritettävä.

Tapaus 2. Kaikki värilistat kokoelmassa $\mathfrak{L}$ eivät ole samanlaisia. Tällöin syklissä C_n on vierekkäiset solmut v_i ja v_{i+1} siten, että $L(v_i) \neq L(v_{i+1})$. Näin ollen on olemassa väri $a \in L(v_{i+1}) \setminus L(v_i)$. Verkko $C_n - v_i$ on polku, jossa on $n-1$ solmua. Olkoon edelleen $\mathfrak{L}' = \{L(v) : v \in V(C_n - v_i)\}$. Lauseen 3.3.7 mukaan verkolla $C_n - v_i$ on olemassa $\mathfrak{L}'$-listaväritys c', jossa $c'(v_{i+1}) = a$. Olkoon $b \in L(v_i)$ siten, että $b \neq c'(v_{i-1})$. Silloin väritys c määriteltynä

$$c(v) = \begin{cases} b & \text{jos } v = v_i \\ c'(v) & \text{jos } v \neq v_i \end{cases}$$

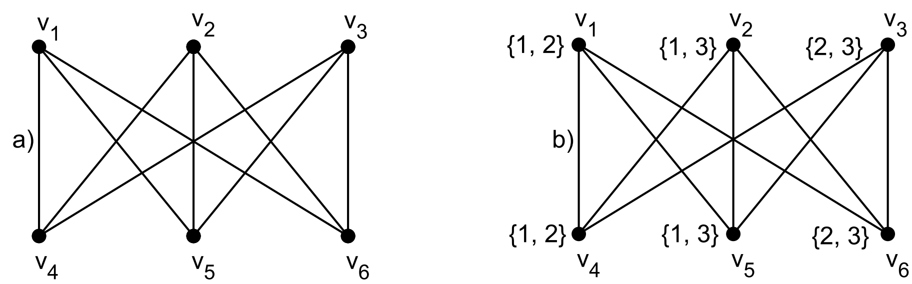
on verkon C_n $\mathfrak{L}$-listaväritys. [3, s. 232]

□

Koska jokaisen parittoman syklin kromaattinen luku on 3, parittoman syklin kromaattinen listaluku on vähintään 3. Itseasiassa jokainen pariton sykli on 3-listaväritettävä. [3, s. 232]

Edellä todistettiin, että kaikki puut ja parilliset syklit ovat 2-listaväritettäviä. Puut ja parilliset syklit ovat esimerkkejä kaksijakoisista verkoista, mutta kaikki kaksijakoiset verkot eivät kuitenkaan ole 2-listaväritettäviä. Havainnollistetaan tätä seuraavalla esimerkillä.

Esimerkki 3.3.9. Tarkastellaan Kuvan 20 a) täydellistä kaksijakoista verkkoa $K_{3,3}$. Osoitetaan aluksi, että $\chi_\ell(K_{3,3}) \leq 3$. Olkoon annettu värilistat $L(v_i)$ $(1 \leq i \leq 6)$, joille $|L(v_i)| = 3$. Tarkastellaan kahta tapausta, jotka riittävät todistamaan, että $K_{3,3}$ on 3-listaväritettävä.



Kuva 20: Verkko $K_{3,3}$ on 3-listaväritettävä.

Tapaus 1. Tietty väri esiintyy kahdessa tai useammassa listassa $L(v_1)$, $L(v_2)$ ja $L(v_3)$ tai kahdessa tai useammassa listassa $L(v_4)$,

$L(v_5)$ *ja* $L(v_6)$*. Sovitaan, että väri* a *esiintyy listoissa* $L(v_1)$ *ja* $L(v_2)$. Asetetaan solmuille v_1 ja v_2 väri a ja solmulle v_3 mikä tahansa listan $L(v_3)$ väreistä. Siten vähintään yksi kolmesta väristä värilistassa $L(v_i)$ on käytettävissä solmulle v_i $(i = 4, 5, 6)$.

Tapaus 2. Joukot $L(v_1)$*,* $L(v_2)$ *ja* $L(v_3)$ *ovat pareittain erillisiä kuten ovat myös joukot* $L(v_4)$*,* $L(v_5)$ *ja* $L(v_6)$. Olkoon $a_1 \in L(v_1)$ ja $a_2 \in L(v_2)$. Jos mikään joukoista $L(v_4)$, $L(v_5)$ ja $L(v_6)$ ei sisällä sekä väriä a_1 että väriä a_2, niin olkoon a_3 mikä tahansa väri listasta $L(v_3)$. Tällöin jokaiselle solmulle v_4, v_5 ja v_6 on käytettävissä oleva väri, jolloin muodostuu verkon $K_{3,3}$ aito väritys. Jos täsmälleen yksi joukoista $L(v_4)$, $L(v_5)$ ja $L(v_6)$ sisältää sekä värin a_1 että värin a_2, niin valitaan väri $a_3 \in L(v_3)$ siten, että mikään joukoista $L(v_4)$, $L(v_5)$ ja $L(v_6)$ ei sisällä kaikkia värejä a_1, a_2 ja a_3. Määräämällä solmulle v_3 väri a_3 huomataan, että jokaiselle solmulle v_4, v_5 ja v_6 on käytettävissä oleva väri kunkin solmun omassa värilistassa.

Näin ollen $\chi_\ell(K_{3,3}) \leq 3$. Osoitetaan vielä, että $\chi_\ell(K_{3,3}) = 3$. Kuvassa 20 b) on esitetty eräät 2-kokoiset värilistat $L(v_i)$, $1 \leq i \leq 6$. Oletetaan ensin, että solmu v_1 väritetään värillä 1. Tällöin solmu v_4 täytyy värittää värillä 2 ja solmu v_5 värillä 3. Näin ollen solmulle v_3 valittava väri on aina sama joko solmun v_4 tai solmun v_5 värin kanssa. Jos solmu v_1 väritetään värillä 2, niin solmu v_4 täytyy värittää värillä 1 ja solmu v_6 värillä 3. Tällöin solmulle v_3 valittava väri on aina sama joko solmun v_4 tai solmun v_6 värin kanssa. Verkkoa $K_{3,3}$ ei siis voi värittää kaikilla 2-kokoisten värilistojen kokoelmilla. Näin ollen täydellinen kaksijakoinen verkko $K_{3,3}$ ei ole 2-listaväritetttävä ja siten $\chi_\ell(K_{3,3}) = 3$.

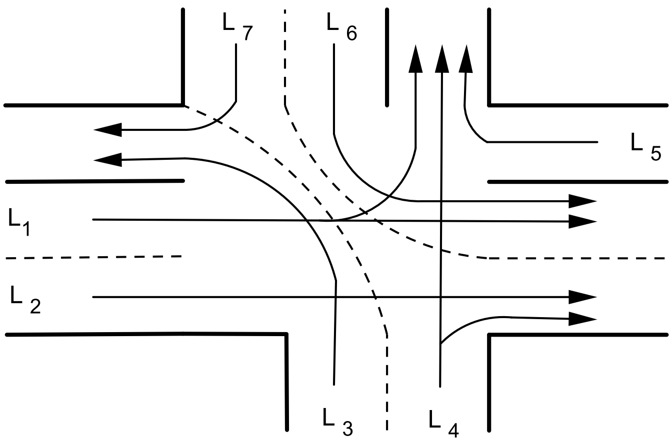
3.4 Solmuväritysten soveltaminen

On useita ongelmia, joita voidaan analysoida ja joskus ratkaista mallintamalla niitä verkkojen avulla. Ratkaistavassa ongelmassa kuvattu tilanne voidaan mallintaa verkon avulla ja määrittää verkon solmuväritys tarkoituksenmukaisella tavalla. Kun sovelluskohdetta mallinnetaan solmuvärityksen avulla, tietyn väriluokan solmut tyypillisesti edustavat yksilöitä tai asioita, jotka eivät ole ristiriidassa keskenään. Tarkastellaan seuraavaksi solmuvärityksen avulla ratkaistavia liikenteen, radiotaajuuksien, kemiallisten aineiden varastoinnin ja aikataulutuksen ongelmia.

Liikennevalojärjestelmä

Risteyksen liikennevalojärjestelmän hallitsemista voidaan mallintaa solmuvärityksen avulla. Liikennevaloristeystä mallinnetaan verkolla, jossa solmut edustavat risteyksen ajokaistoja ja kaaret yhdistävät niitä ajokaistoja, jotka menevät päällekkäin risteystä ylitettäessä. Solmuvärityksen kromaattinen luku kuvaa liikennevalojen jaksojen pienintä tarvittavaa määrää. Värityksen samaan väriluokkaan kuuluvat solmut edustavat niitä ajokaistoja, joita pitkin risteys on turvallista ylittää samanaikaisesti.

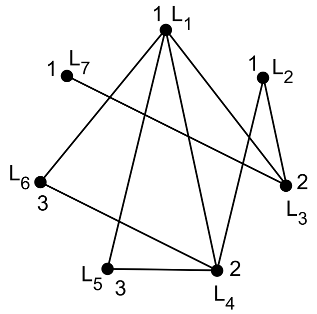
Esimerkki 3.4.1. Kuvassa 21 on esitetty liikenteen ajokaistat $L_1, L_2, \ldots, L_7$ kahden kadun risteysalueella. Risteykseen sijoitetaan liikennevalot. Tietyn liikennevalojen jakson aikana ajokaistojen, joiden liikennevalo on vihreä, autot voivat turvallisesti ylittää risteyksen sallittuihin suuntiin. Mikä on pienin määrä liikennevalojen jaksoja siten, että (lopulta) kaikki autot voivat ylittää risteyksen?



Kuva 21: Ajokaistat katujen risteyksessä.

Muodostetaan verkko G solmujen joukosta $V(G) = \{L_1, L_2, \ldots, L_7\}$, missä solmu L_i on viereinen solmulle L_j $(i \neq j)$, jos autot kaistoilla L_i ja L_j eivät voi turvallisesti ylittää risteystä samaan aikaan (Kuva 22). Tällöin pienintä määrää tarvittavia liikennevalojen jaksoja vastaa verkon kromaattinen luku $\chi(G)$. Koska solmujen joukko $\{L_1, L_4, L_5\}$ muodostaa verkon G suurimman klikin, niin klikkiluku $\omega(G) = 3$. Seurauksen 3.2.3 mukaan $\chi(G) \geq 3$. Kuvassa 22 on esitetty eräs verkon G 3-väritys, joten verkon kromaattinen luku $\chi(G) = 3$. Tarvitaan siis kolme liikennevalojen jaksoa, että kaikki autot voivat ylittää risteyksen. Tässä värityksessä esimerkiksi ajokaistat L_1, L_2 ja L_7

kuuluvat samaan väriluokkaan, joten näiden kaistojen autot voivat ylittää risteyksen turvallisesti samaan aikaan. [3, ss. 172-173, tehtävä 27]



Kuva 22: Esimerkin 3.4.1 verkko.

Radiotaajuuksien suunnittelu

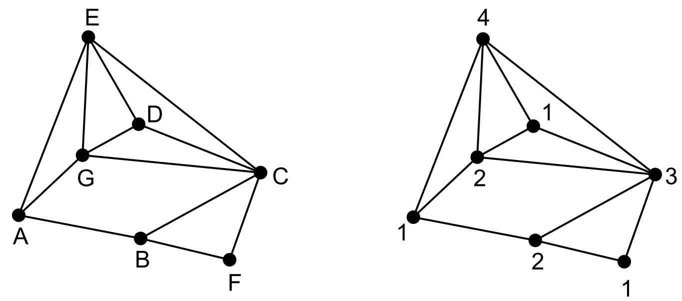
Radiotaajuuksien käyttö vaatii suunnittelua, jotta vältyttäisiin häiriöiltä radiolähetyksissä. Oletetaan, että verkon G solmut edustavat radioasemien radiolähettimiä. Tässä mallinnuksessa kaksi radioasemaa ovat vierekkäiset, kun niiden lähestysalueet ovat päällekkäiset, mikä aiheuttaisi häiriötä lähetyksissä, jos lähetykset olisivat samalla taajuudella. Siten kahdelle "vierekkäiselle" radioasemalle pitäisi määrätä eri lähetystaajuudet. Merkitsemällä taajuuksia väreillä tilanne muuttuu verkon solmuväritysongelmaksi. Värityksessä jokainen väriluokka sisältää solmut, jotka edustavat radioasemia, joiden on mahdollista käyttää samaa lähetystaajuutta. Tässä mallissa kromaattinen luku $\chi(G)$ on tarvittavien lähetystaajuuksien määrä, jotta vältetään lähetyksien häiriöt. [5, s. 373]

Esimerkki 3.4.2. Seitsemälle radiolähettimelle $A, B, \ldots, G$ on määrättävä lähetystaajuudet. Oletetaan, että jos kaksi lähetintä on alle 100 mailin päässä toisistaan, niiden täytyy lähettää ohjelmaa eri taajuuksilla. Taulukossa 2 on esitetty seitsemän radiolähettimen väliset välimatkat. Muodostetaan verkko H, jossa solmut edustavat radiolähettimiä ja kaaret yhdistävät niitä radiolähettimiä, jotka ovat alle 100 mailin päässä toisistaan. Kuvassa 23 vasemmalla on edellä kuvatulla tavalla muodostettu verkko.

Pienintä tarvittavaa taajuuksien määrää vastaa siis verkon kromaattinen luku $\chi(H)$. Koska verkko H sisältää täydellisen verkon K_4, on verkon klikkiluku $\omega(H) = 4$ ja siten $\chi(H) \geq 4$. Kuvassa 23 oikealla on esitetty verkon H 4-solmuväritys, joten verkon kromaattinen luku $\chi(H) = 4$. Näin ollen

Taulukko 2: Seitsemän radiolähettimen välimatkat maileina.

	B	C	D	E	F	G
A	55	110	108	60	150	88
B		87	142	133	98	139
C			77	91	85	93
D				75	114	82
E					107	41
F						123



Kuva 23: Radiolähettimistä muodostettu verkko ja sen väritys.

radiolähetysten häiriöttömään lähetykseen tarvitaan neljä eri taajuutta. Samaan väriluokkaan kuuluvat radiolähettimet (esimerkiksi A, D ja F) voivat lähettää ohjelmansa samalla taajuudella. [5, s. 24]

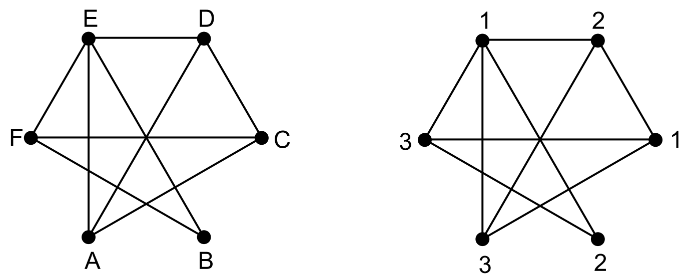
Kemiallisten aineiden varastointi

Solmuväritystä voidaan soveltaa ratkaistaessa erilaisten materiaalien varastointiongelmia. Esimerkiksi kemiallisten aineiden varastoinnissa on noudatettava huolellisuutta, sillä jotkut kemikaalit reagoivat voimakkaasti keskenään ollessaan lähekkäin. Yhteensopimattomat kemikaalit voivat muodostaa helposti syttyviä tai myrkyllisiä seoksia. Turvallisinta olisi säilyttää tällaisia yhteensopimattomia kemikaaleja eri huoneissa. Varastoitavista kemikaaleista voidaan muodostaa verkko, jonka solmut edustavat kemikaaleja ja kaaret yhdistävät yhteensopimattomia kemikaaleja. Verkon solmuvärityksen kromaattinen luku vastaa tällöin pienintä tarvittavien varastohuoneiden lukumäärää. [2, s. 131]

Esimerkki 3.4.3. Eräässä tehtaassa käytetään kuutta eri kemikaalia $A - F$. Taulukossa 3 on esitetty, mitkä kemikaalit ovat yhteensopimattomia keske-

Taulukko 3: Kuuden kemikaalin yhteensopimattomuus.

Kemikaali	Yhteensopimattomuus
A	C, D, E
B	E, F
C	A, D, F
D	A, C, E
E	A, B, D, F
F	B, C, E



Kuva 24: Kemikaaleista muodostettu verkko ja sen väritys.

nään. Mikä on pienin tarvittava määrä huoneita, että kemikaalit voidaan varastoida turvallisesti?

Muodostetaan verkko G, jossa solmut edustavat kemikaaleja ja kaaret yhdistävät vain niitä solmuja (kemikaaleja), jotka ovat yhteensopimattomia keskenään. Kuvassa 24 on esitetty kemikaaleista muodostettu verkko. Verkon G riippumaton solmuluku $\alpha(G) = 2$, joten Lauseesta 3.2.5 saadaan $\frac{6}{2} = 3 \leq \chi(G) \leq 5$. Kuvan 24 mukaan verkolla G on aito 3-väritys, joten verkon kromaattinen luku $\chi(G) = 3$. Näin ollen kemikaalien turvalliseen varastointiin tarvitaan vähintään 3 huonetta. Esimerkiksi samaan väriluokkaan kuuluvat kemikaalit A ja F voidaan varastoida samaan huoneeseen.

Aikataulutusongelma

Verkkojen solmuväritystä voidaan käyttää myös erilaisten aikataulutusongelmien ratkaisemiseen. Tällaisia ongelmia ovat esimerkiksi yliopistojen kurssi- ja tenttiaikataulujen laatiminen sekä erilaisten kokousten aikatauluttaminen. Tutustutaan seuraavaksi tarkemmin komiteoiden kokousten järjestämiseen. Annetusta ryhmästä henkilöitä muodostetaan komiteoita siten, että henkilö voi kuulua useaan eri komiteaan. Jokaiselle komitealle tulisi määrätä ko-

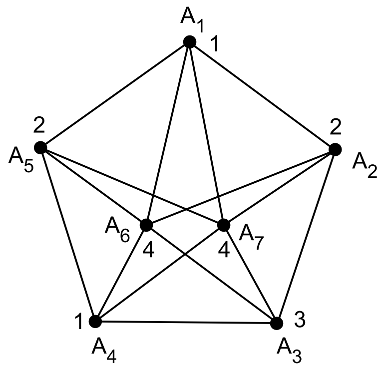
kousaika. Kaksi komiteaa, joilla on yhteinen jäsen, ei luonnollisesti voi tavata samaan aikaan. Mallintava verkko voidaan muodostaa tilanteesta siten, että solmut kuvaavat komiteoita ja kaksi solmua ovat vierekkäiset, jos komiteoilla on yhteinen jäsen. [3, s. 153]

Esimerkki 3.4.4. Yrityksellä on kahdeksan työntekijää, joita merkitään $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$. Työntekijät päättävät kokouksessa, että olisi hyödyllisempää kokoontua kolmen hengen komiteoissa. Komiteat käsittelevät seitsemää yritykselle tärkeää kysymystä. Seitsemän tarkoitukseen valittua komiteaa ovat

$$A_1 = \{a_1, a_2, a_3\}, A_2 = \{a_2, a_3, a_4\}, A_3 = \{a_4, a_5, a_6\}, A_4 = \{a_5, a_6, a_7\},$$

$$A_5 = \{a_1, a_7, a_8\}, A_6 = \{a_1, a_4, a_7\}, A_7 = \{a_2, a_6, a_8\}.$$

Mikä on pienin ajanjaksojen määrä, joka tarvitaan komiteoiden tapaamisiin?



Kuva 25: Esimerkin 3.4.4 verkko.

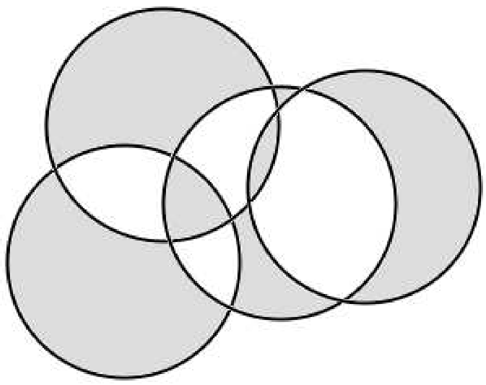
Kaksi komiteaa ei siis voi pitää kokousta samana ajanjaksona, jos joku työntekijöistä kuuluu molempiin komiteoihin. Muodostetaan verkko G, jossa solmujen joukko on $V(G) = \{A_1, A_2, \ldots, A_7\}$. Kaksi solmua A_i ja A_j ovat vierekkäiset, jos $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ (ja siten komiteoiden A_i ja A_j täytyy tavata eri ajanjaksoina). Verkko G on esitetty Kuvassa 25. Tarvittavien ajanjaksojen määrä saadaan ratkaisemalla verkon kromaattinen luku $\chi(G)$. Verkon G riippumaton luku on $\alpha(G) = 2$. Lauseesta 3.2.5 saadaan $\chi(G) \geq n/\alpha(G) = 7/2$ ja siten $\chi(G) \geq 4$. Koska on olemassa Kuvan 25 mukainen verkon G 4-solmuväritys, siitä seuraa, että $\chi(G) = 4$. Joten seitsemän komitean tapaamisiin tarvittavien ajanjaksojen pienin määrä on 4. [3, ss. 153-154]

4 Karttojen ja tasoverkkojen värittäminen

Tässä luvussa tutustutaan alueiden ja verkkojen värittämiseen kahdella värillä. Lisäksi Alaluvussa 4.3 käsitellään kuuluisaa Neliväriongelmaa, josta verkkojen värittäminen on saanut alkunsa ja jolla on ollut suuri merkitys verkkoteorian kehittymisessä. Neliväriongelman historiallisten tapahtumien tarkastelun lisäksi todistetaan heikompi Viisivärilause.

4.1 Alueiden värittäminen kahdella värillä

Tutkitaan alueiden värittämistä kahdella värillä ja piirretään tasoon toisiaan leikkaavia ympyröitä. Nämä ympyrät jakavat tason tiettyyn määrään alueita. Kuvassa 26 on tällainen joukko ympyröitä ja alueet väritettyinä "vuorotellen" käyttäen kahta väriä. Kysymys kuuluu, voidaanko ympyröiden muodostamat alueet *aina* värittää tällä tavalla. Osoitetaan, että vastaus on kyllä ja esitetään se täsmällisemmin.

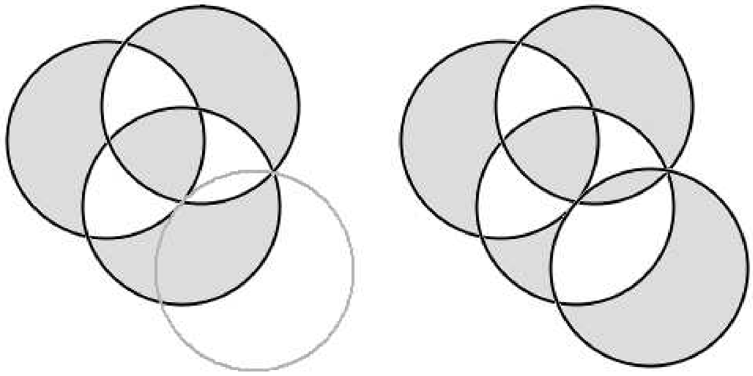


Kuva 26: Ympyröiden muodostamien alueiden 2-väritys.

Lause 4.1.1. *Tasossa olevat ympyröiden muodostamat alueet voidaan värittää kahdella värillä siten, että mitkä tahansa kaksi aluetta, joilla on yhteistä rajaa, ovat eriväriset.*

Todistus. Todistetaan väite induktiolla, kun n on ympyröiden lukumäärä. Jos $n = 1$, saadaan ainoastaan kaksi aluetta, joista toinen voidaan värittää harmaalla ja toinen valkoisella. Joten olkoon $n > 1$. Valitaan mikä tahansa ympyröistä, merkitään sitä kirjaimella C ja unohdetaan se toistaiseksi. Oletetaan, että jäljelle jäävien $n - 1$ ympyrän muodostamat alueet voidaan värittää käyttäen harmaata ja valkoista siten, että samaa rajaa jakavat alueet väritetään eri väreillä.

Seuraavaksi asetetaan puuttuva ympyrä takaisin ja vaihdetaan väritystä seuraavasti: ympyrän C ulkopuolella väritystä ei muuteta, mutta ympyrän C sisäpuolella vaihdetaan harmaa ja valkoinen väri keskenään (Kuva 27).



Kuva 27: Uuden ympyrän lisääminen ja uudelleenvärittäminen.

On helppoa nähdä, että tällä tavalla saatu väritys täyttää vaaditut ehdot. Tarkastellaan vielä minkä tahansa ympyrän mitä tahansa kaaren osaa. Jos kaari on ympyrän C ulkopuolella, niin kaksi aluetta sen eri puolilla olivat eriväriset ja niiden värit eivät muuttuneet uudelleenvärityksessä. Jos kaari on ympyrän C sisäpuolella, niin jälleen alueet sen eri puolilla olivat eriväriset. Vaikka ympyrän lisäämisen jälkeen alueiden värit vaihdettiin, ovat ne silti eriväriset. Viimeiseksi kaari voi olla ympyrällä C. Kaksi aluetta kaaren molemmin puolin olivat samaa aluetta ennen ympyrän C takaisin asettamista, joten niillä oli sama väri. Nyt toinen alueista on ympyrän C sisällä ja sen väri vaihdetaan; toinen on ympyrän ulkopuolella ja sen väri pysyy samana. Uudelleenvärittämisen jälkeen alueet ovat siis eriväriset.

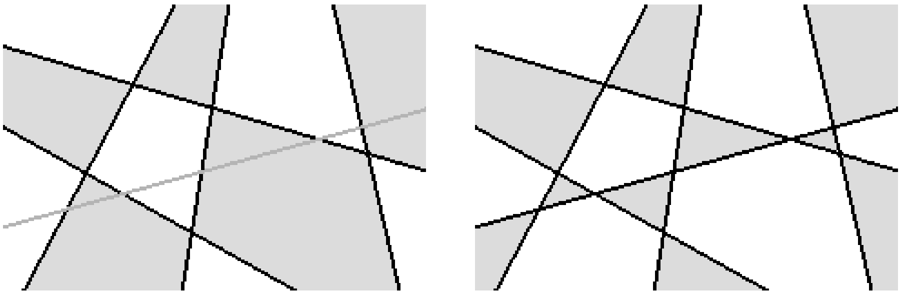
Näin ollen on todistettu, että n ympyrän muodostamat alueet voidaan värittää kahdella värillä edellyttäen, että $n-1$ ympyrän muodostamat alueet voidaan värittää kahdella värillä. Induktioperiaatteen mukaan lause on todistettu. [11, ss. 197-199] □

Ympyröiden tavoin tasoon piirretyt suorat jakavat tason alueisiin, jotka voidaan aina värittää kahdella värillä. Myös todistus on idealtaan vastaava.

Lause 4.1.2. *Tasossa olevat suorat jakavat tason alueisiin, jotka voidaan värittää kahdella värillä.*

Todistus. Todistetaan väite induktiolla, kun n on suorien lukumäärä. Jos $n = 1$, saadaan kaksi aluetta, joista toinen voidaan värittää harmaalla ja toinen valkoisella. Olkoon siis $n > 1$. Tehdään induktio-oletus, että $n-1$

suoran muodostamat alueet voidaan värittää kahdella värillä. Olkoon annettu n suoraa, jotka jakavat tason alueisiin. Poistetaan mikä tahansa suora l ja väritetään jäljelle jääneet alueet induktio-oletuksen mukaisesti kahdella värillä. Laitetaan sitten suora l takaisin ja vaihdetaan suoran l toisen puolen värit; valkoinen harmaaksi ja harmaa valkoiseksi. Kuvassa 28 lisätään suora l ja vaihdetaan sen alapuolen värit keskenään. Nyt suoran l molemmat puolet on väritetty oikein ja riittää osoittaa, että millä tahansa kahdella alueella, joiden raja on suoralla l, on eri värit. Mutta mitkä tahansa kaksi sellaista aluetta olivat samaa aluetta ennen suoran l lisäämistä, joten ne olivat myös samanväriset. Suoran l toisen puolen värien vaihtamisen takia uusilla alueilla on välttämättä eri värit. [11, s. 199, tehtävä 13.1.2 a)] □



Kuva 28: Suoran lisääminen ja uudelleenvärittäminen.

4.2 Verkkojen värittäminen kahdella värillä

Edellisen alaluvun ympyröiden ja suorien muodostamien alueiden värittämisongelmat voidaan esittää myös verkkojen solmujen 2-värityksen avulla. Esimerkiksi ympyröiden muodostamista alueista saadaan verkko seuraavalla tavalla: Jokaista aluetta edustaa verkon solmu. Verkossa kahta solmua yhdistää kaari jos ja vain jos niitä vastaavilla alueilla on yhteistä rajakaarta.

Jos verkossa on ainakin yksi kaari, vähintään kaksi väriä tarvitaan verkon värittämiseen. Toisaalta on helppoa nähdä, että kolmio, kolmen solmun täydellinen verkko, vaatii kolme väriä tullakseen väritetyksi. Näin ollen verkon, joka sisältää kolmion, värittämiseen tarvitaan vähintään kolme väriä. Verkko ei kuitenkaan välttämättä ole 2-väritettävä, vaikka se ei sisällä kolmiota. Seuraava lause määrää yksikäsitteisesti sen, milloin verkko on 2-väritettävä.

Lause 4.2.1. *Verkko on 2-väritettävä jos ja vain jos se ei sisällä paritonta sykliä.*

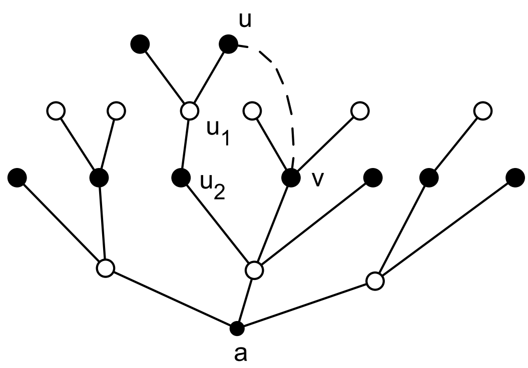
Todistus. Oletetaan ensin, että verkko on 2-väritettävä. Tarkastellaan verkon mielivaltaista sykliä $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1$. Solmut, joilla on parillinen indeksi, väritetään esimerkiksi mustalla ja solmut, joilla on pariton indeksi, väritetään esimerkiksi valkoisella. Koska solmujen v_1 ja v_k täytyy olla erivärisét, indeksin k on oltava parillinen. Mutta k on syklin pituus, joten kaikkien syklien on oltava pituudeltaan parillisia. Näin ollen jos verkko on 2-väritettävä, se ei sisällä paritonta sykliä.

Oletetaan seuraavaksi, että verkossa ei ole paritonta sykliä. Valitaan mikä tahansa solmu a ja väritetään se mustalla. Väritetään kaikki sen naapurisolmut valkoiseksi. Huomataan, että solmun a kahden naapurisolmun välillä ei voi olla kaarta, koska silloin verkossa olisi kolmio ja näin ollen pariton sykli. Väritetään seuraavaksi kaikki valkoisten solmujen värittämättömät naapurisolmut mustalla. On osoitettava, että mustien solmujen välillä ei ole kaarta: Solmun a ja uuden mustan solmun välillä ei ole kaarta, koska uudet mustat solmut eivät olleet solmun a naapureita. Myöskään uusien mustien solmujen välillä ei voi olla kaarta, koska silloin verkossa olisi sykli, jonka pituus on 3 tai 5. Jatkamalla samanlaista proseduuria saadaan verkon solmujen 2-väritys.

On helppoa väittää, että kahden samanvärisen solmun välillä ei ole kaarta. Tehdään vastaoletus, että verkossa on kaksi vierekkäistä solmua u ja v, jotka ovat molemmat mustia. Solmu u on viereinen aikaisemmin valkoiseksi väritetylle solmulle u_1; joka puolestaan on viereinen vielä aikaisemmin mustaksi väritetylle solmulle u_2; jne. Tällä tavalla voidaan valita polku P solmusta u takaisin aloitussolmuun. Samoin voidaan valita polku Q solmusta v aloitussolmuun. Aloitetaan solmusta v ja seurataan polkua Q siihen asti, että ensimmäisen kerran osutaan polkuun P ja sitten seurataan polkua P solmuun u asti. Tämä polku kaaren uv kanssa muodostaa syklin. Koska polussa värit vuorottelevat, mutta polku alkaa ja päättyy mustaan väriin, on sykli pariton (Kuva 29). Päädytään siis ristiriitaan.

Jos verkko on yhtenäinen, on kaikki verkon solmut väritetty 2 värillä. Jos verkko on epäyhtenäinen, täytyy sama proseduuri toistaa kaikille verkon komponenteille. Selvästi näin saadaan koko verkon 2-väritys. Tämä todistaa Lauseen 4.2.1. [11, s. 201] □

Lauseen 4.2.1 todistus antaa algoritmin verkon 2-värityksen löytämiseksi, jos sellainen on olemassa. Toisaalta se antaa algoritmin parittoman syklin löytämiseksi. Lauseista 2.3.7 ja 4.2.1 seuraa, että jokainen kaksijakoinen verkko on 2-väritettävä.



Kuva 29: Epäonnistunut 2-väritys tuottaa parittoman syklin.

4.3 Neliväriongelma

Neliväriongelma esitettiin ensimmäisen kerran vuonna 1852. Silloin englantilainen Francis Guthrie (1831-1899) havaitsi, että Englannin kreivikunnat voitaisiin värittää neljällä värillä siten, että naapurikreivikunnat olisivat keskenään erivärisiä. Tämä sai hänet pohtimaan, voitaisiinko jokaisen kartan (todellisen tai kuvitellun) kreivikunnat värittää korkeintaan neljää väriä käyttämällä. Francis mainitsi ongelmasta nuoremmalle veljelleen Frederickille, joka siihen aikaan osallistui yleisesti tunnetun matemaatikon Augustus De Morganin kurssille. Veljensä suostumuksella Frederick mainitsi ongelmasta De Morganille, joka piti ongelmaa uutena, mutta oli kykenemätön ratkaisemaan sitä. Huolimatta De Morganin suuresta mielenkiinnosta ongelmaa kohtaan vain harva muu ongelmasta tietoinen matemaatikko jakoi hänen kiinnostuksensa. Neljännesvuosisata kuluikin vähäisellä aktiivisuudella ongelmaa kohtaan. [3, s. 205]

London Mathematical Society yhteisön kokouksessa vuonna 1878 suuri matemaatikko Arthur Cayley tiedusteli Neliväriongelman tilaa. Tämä herätti mielenkiinnon ongelmaa kohtaan ja johti brittiläisen lakimiehen Alfred Bray Kempen (1849-1922) kirjoittamaan artikkeliin vuonna 1879. Artikkeli sisälsi todistusehdotuksen siihen, että jokainen kartta voidaan värittää enintään neljällä värillä siten, että naapurikreivikunnat on väritetty eri väreillä. Kempen alkuperäinen todistus löytyy artikkelista *On the Geographical Problem of the Four Colors* [10]. Seuraavan kymmenen vuoden ajan Neliväriongelman ajateltiin olevan ratkaistu. [3, s. 205]

Kuitenkin brittiläisen matemaatikon Percy John Heawoodin (1861-1955) *Quarterly Journal of Mathematics* lehdessä julkaistu artikkeli *Map Colour Theorem* muutti tilannetta vuonna 1890 [8]. Artikkelissa esiteltiin kartta ja sen kreivikuntien vaillinainen väritys, minkä Heawood osoitti olevan vastaesimerkki Kempen käyttämälle todistusmenetelmälle. Vaikka tämä vastaesimerkki ei tarkoittanut sitä, että olisi olemassa karttoja, joiden värittämiseksi vaaditaan ainakin viisi väriä, osoitti se Kempen käyttämän menetelmän olevan tulokseton. Siitä huolimatta Heawood pystyi käyttämään Kempen menetelmää todistaakseen, että jokainen kartta voidaan värittää enintään viittä väriä käyttämällä. [3, s. 206, 217]

Viisivärilauseen todistamista varten tarvitaan tietoa tasoverkon solmujen ja kaarien välisestä riippuvuudesta. Aloitetaan määrittelemällä tasoverkon alueen käsite.

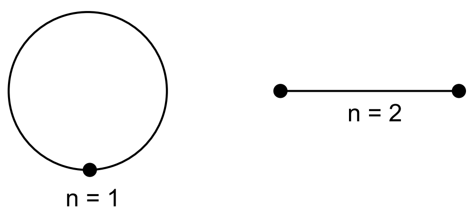
Määritelmä 4.3.1. Tasoverkon G kaarien rajoittamia tasoalueita kutsutaan *alueiksi*. Tasoverkon G ulkopuolista aluetta kutsutaan *äärettömäksi alueeksi*. [13, s. 111]

On olemassa yksinkertainen kaava yhtenäisen tasoverkon solmujen, kaarien ja alueiden lukumäärien suhteiden välille. Kaava tunnetaan Eulerin kaavana, jonka kehitti verkkoteorian isänä pidetty sveitsiläinen matemaatikko Leonhard Euler (1707-1782). [13, s. 1].

Lause 4.3.2 (Eulerin kaava). *Jos yhtenäisessä tasoverkossa G on n solmua, e kaarta ja f aluetta, niin*

$$n - e + f = 2.$$

Todistus. Todistetaan lause induktiolla verkon G kaarien lukumäärän e suhteen. Jos $e = 0$, niin yhtenäisessä verkossa G täytyy olla vain yksi solmu. Siten $n = 1$ ja on yksi ääretön alue, joten $f = 1$. Silloin $n-e+f = 1-0+1 = 2$. Jos $e = 1$, niin verkon G solmujen lukumäärä on joko 1 tai 2. Ensimmäinen vaihtoehto esiintyy, kun kaari on silmukka. Molemmat vaihtoehdot on esitetty Kuvassa 30. Silmukan tapauksessa $n-e+f = 1-1+2 = 2$ ja ei-silmukan tapauksessa $n - e + f = 2 - 1 + 1 = 2$. Näin ollen lause on tosi, kun $e = 0$ ja $e = 1$.



Kuva 30: Yhtenäiset yhden kaaren tasoverkot.

Oletetaan, että lause on tosi kaikille yhtenäisille tasoverkoille G, joissa on $e-1$ kaarta. Lisätään verkkoon G uusi kaari k siten, että muodostuu edelleen yhtenäinen tasoverkko $G+k$. Tarkastellaan kolmea mahdollista tapausta.

(i) Kaari k on silmukka, jolloin syntyy uusi silmukan rajoittama alue, mutta solmujen lukumäärä pysyy muuttumattomana.

(ii) Kaari k yhdistää kaksi verkon G solmua, jolloin yksi verkon G alueista jakaantuu kahtia ja siten alueiden määrä kasvaa yhdellä, mutta solmujen lukumäärä pysyy muuttumattomana.

(iii) Kaari k liittyy yhteen verkon G solmuun, jolloin kaaren toinen päätesolmu on lisättävä verkkoon. Verkkoon siis lisätään yksi solmu, mutta alueiden lukumäärä pysyy muuttumattomana.

Merkitään n', e' ja f' solmujen, kaarien ja alueiden lukumääriä verkossa G ja n, e ja f solmujen, kaarien ja alueiden lukumääriä verkossa $G+k$. Silloin

(i) $n-e+f = n'-(e'+1)+(f'+1) = n'-e'+f'$

(ii) $n-e+f = n'-(e'+1)+(f'+1) = n'-e'+f'$

(iii) $n-e+f = (n'+1)-(e'+1)+f' = n'-e'+f'$.

Induktio-oletuksen mukaan $n'-e'+f' = 2$, joten jokaisessa tapauksessa $n-e+f = 2$. Lause on siis tosi jokaiselle yhtenäiselle tasoverkolle, jossa on e kaarta, kun se on tosi jokaiselle yhtenäiselle tasoverkolle, jossa on $e-1$ kaarta. Induktioperiaatteen mukaan lause on todistettu. [13, ss. 116-117] □

Eulerin kaavaa soveltamalla saadaan hyödyllinen tulos jatkoa ajatellen. Sen avulla voidaan arvioida suuruusluokkaa n olevan tasoverkon korkeinta mahdollista kaarien lukumäärää.

Lause 4.3.3. *Tasoverkossa, jossa on n solmua, on korkeintaan $3n-6$ kaarta.*

Todistus. Olkoon verkossa n solmua, e kaarta ja f aluetta. Eulerin kaavasta (Lause 4.3.2) termejä järjestelemällä saadaan

$$n+f = e+2.$$

Toinen yhteys näiden lukujen välille saadaan laskemalla kaaret alue alueelta. Jokaisella alueella on vähintään kolme kaarta rajallaan, joten lasketaan vähintään $3f$ kaarta. Jokainen kaari on laskettu kahdesti (kaari on aina kahden alueen rajalla), joten kaarien lukumäärä on vähintään $3f/2$. Toisin sanoen $f \leq \frac{2}{3}\, e$. Käyttämällä tätä Eulerin kaavan kanssa saadaan

$$e + 2 = n + f \leq n + \frac{2}{3}\, e,$$

josta uudelleenjärjestelemällä saadaan $e \leq 3n - 6$. [11, s. 193] □

Lemma 4.3.4. *Jokaisessa tasoverkossa on solmu, jonka asteluku on korkeintaan* 5.

Todistus. Tämän lemman todistamiseen tarvitaan ainoastaan Eulerin kaavan seurausta Lausetta 4.3.3. Tehdään vastaoletus, että on olemassa verkko, jolle Lemma 4.3.4 ei päde. Tällöin verkon jokaisen solmun asteluku on vähintään 6. Laskemalla kaaret solmu solmulta saadaan vähintään $6n$ kaarta. Jokainen kaari on laskettu kahdesti, joten kaarien lukumäärä on vähintään $3n$, mikä on ristiriidassa Lauseen 4.3.3 tuloksen kanssa. [11, s. 208] □

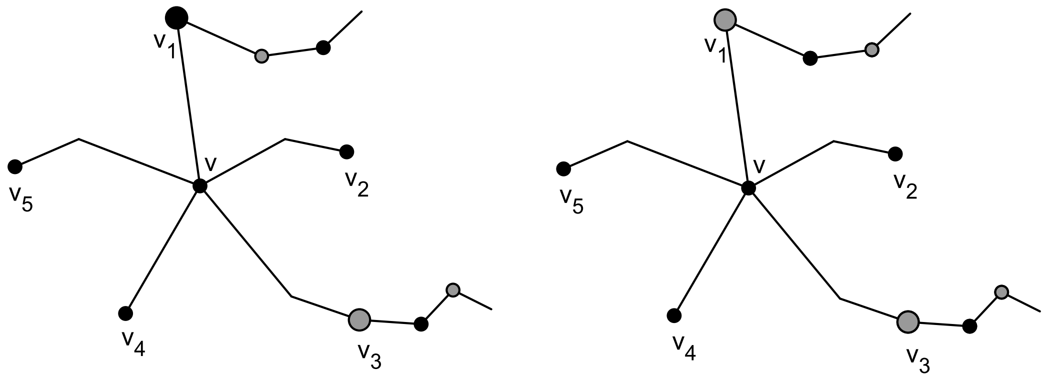
Lemman 4.3.4 tulos on tärkeä todistettaessa Viisivärilausetta. Esitetään seuraavaksi Heawoodin Viisivärilauseen todistus, jossa hän käytti apunaan Kempen todistustekniikkaa.

Lause 4.3.5 (Viisivärilause). *Jokainen tasoverkko on väritettävissä viidellä värillä.*

Todistus. Todistetaan lause induktiolla verkolle, jossa on n solmua. Lause on selvästi tosi, kun $1 \leq n \leq 5$. Oletetaan, että jokainen suuruusluokkaa $n-1$ oleva tasoverkko on väritettävissä 5 värillä, kun $n \geq 6$. Olkoon G tasoverkko, jossa on n solmua. Osoitetaan, että G on väritettävissä viidellä värillä.

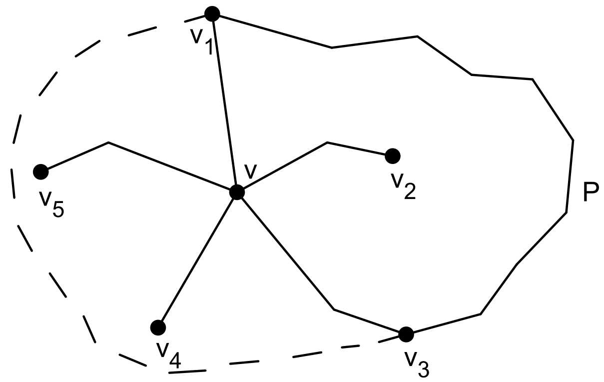
Lemman 4.3.4 mukaan verkossa G on solmu v, jolle $\deg(v) \leq 5$. Koska $G - v$ on suuruusluokkaa $n-1$ oleva tasoverkko, induktio-oletuksesta seuraa, että $G - v$ on väritettävissä viidellä värillä. Olkoon verkko $G - v$ väritetty viidellä värillä siten, että käytettyjä värejä merkitään numeroilla 1, 2, 3, 4 ja 5. Jos yhtä näistä väreistä ei ole käytetty värittämään solmun v naapureita, voidaan väri liittää solmuun v. Tällöin verkosta G tulee 5-väritettävä. Näin ollen voidaan olettaa, että $\deg(v) = 5$ ja että kaikkia viittä väriä on käytetty solmun v naapureiden värityksessä.

Oletetaan, että v_1, v_2, v_3, v_4 ja v_5 ovat syklisesti järjestetyt solmun v naapurit. Voidaan olettaa, että solmuun v_i liittyy väri i, jossa $1 \leq i \leq 5$. Olkoon H verkon $G - v$ se aliverkko, joka muodostuu solmuista, jotka on väritetty väreillä 1 ja 3, ja niiden välisistä kaarista. Näin ollen $v_1, v_3 \in V(H)$. Jos aliverkossa H solmujen v_1 ja v_3 välillä ei ole polkua, voidaan yksinkertaisesti



Kuva 31: Tapaus, jossa solmut v_1 ja v_3 ovat aliverkon H eri komponenteissa.

vaihtaa värien 1 ja 3 paikat solmuun v_1 liittyvässä aliverkon H komponentissa. Kuva 31 esittää tätä solmuun v_1 liittyvän komponentin värien vaihtamista keskenään. Verkko G voidaan nyt värittää viidellä värillä asettamalla solmulle v väri 1.



Kuva 32: Tapaus, jossa solmut v_1 ja v_3 ovat yhdistetyt aliverkossa H.

Oletetaan seuraavaksi, että solmut v_1 ja v_3 kuuluvat aliverkon H samaan komponenttiin. Tämä tarkoittaa sitä, että verkko $G - v$ sisältää solmujen v_1 ja v_3 välisen polun P, jossa kaikki solmut on väritetty värillä 1 tai 3. Polku P ja verkon G polku (v_1, v, v_3) muodostavat syklin sulkien sisäänsä joko solmun v_2 tai molemmat solmut v_4 ja v_5 (Kuva 32). Eritoten tämä tarkoittaa sitä, että verkossa $G - v$ ei ole polkua $v_2 - v_4$, jossa jokainen solmu olisi väritetty värillä 2 tai 4.

Olkoon F verkon $G - v$ se aliverkko, joka muodostuu väreillä 2 ja 4 väritetyistä solmuista sekä niiden välisistä kaarista. Polun P ja verkon G polun (v_1, v, v_3) muodostaman syklin johdosta aliverkko F ei voi olla yhtenäinen. Olkoon F_2 se verkon F komponentti, joka sisältää solmun v_2. Välttämättä $v_4 \notin V(F_2)$. Vaihtamalla komponentin F_2 solmujen värit voidaan solmulle v asettaa väri 2. Verkko G on siten 5-väritettävä. [3, s. 207] □

Sen jälkeen kun vuonna 1890 Heawood julkaisi todistuksen, tiedettiin jokaisen tasoverkon kromaattisen luvun olevan korkeintaan 5. Ei kuitenkaan tunnettu ainuttakaan tasoverkkoa, jonka kromaattinen luku olisi 5. Neliväriongelma oli siis edelleen ratkaisematta. Huolimatta useiden matemaatikkojen yrityksistä ratkaista ongelmaa kesti 86 vuotta ennen kuin ratkaisu saatiin. Vuonna 1976 Kenneth Appel (s. 1932) ja Wolfgang Haken (s. 1928) esittivät tietokoneavusteisen todistuksen Neliväriongelmaan. Todistus perustui 1936 verkon pelkistettyyn yksittäistapaukseen, joita myöhemmin karsittiin 1482 verkkoon. [3, ss. 20-24, 208]

Kaikki eivät kuitenkaan hyväksyneet täysin Appelin ja Hakenin todistusta. Oli herännyt epäilyjä todistuksen oikeellisuudesta pääasiassa kahdesta seuraavasta syystä: (i) osassa todistusta käytetään tietokonetta, eikä sitä voida todentaa käsin; (ii) käsin tarkistettavaksi tarkoitettu osa on niin monimutkainen ja pitkällinen, että kukaan ei ole voinut itsenäisesti tarkistaa sitä täydellisesti. Näistä syistä vuonna 1996 Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour ja Robin Thomas suunnittelivat oman tietokoneavusteisen todistuksen Neliväriongelmaan, joka oli idealtaan vastaava Appelin ja Hakenin todistuksen kanssa. Uusi todistus perustui 633 välttämättömään verkkoon aikaisempien 1482 verkon sijaan. Lisäksi Appel ja Haken käyttivät 487 sääntöä muodostaakseen yksittäistapauksien joukon, kun Robertson, Sanders, Seymour ja Thomas käyttivät vain 32 sääntöä. [12]

Nelivärilausetta ei ole voitu todistaa ilman tietokoneiden apua, joten "puhdas" matemaattinen todistus puuttuu edelleen.

Lause 4.3.6 (Nelivärilause). *Jokainen tasoverkko on väritettävissä neljällä värillä.* [3, s. 208]

5 Kaarien värittäminen

Tähän mennessä on tarkasteltu solmujen ja tasoverkkojen alueiden värityksiä. Kolmas väritystapa on tässä luvussa käsiteltävä kaarien värittäminen. Aikaisemmin solmujen värittämisessä ensisijainen painotus on ollut aidossa solmuvärityksessä. Vastaavasti kaarien värittämisessä vaatimuksena on se, että verkon vierekkäisten kaarien tulee olla erivärisiä. Tällöin on kyse aidosta kaarivärityksestä.

5.1 Määritelmiä

Määritellään aluksi kaarien värittämisen peruskäsitteitä. Huomataan, että käsitteet ovat pitkälti analogisia solmuvärityksen vastaaviin käsitteisiin.

Määritelmä 5.1.1. Verkon G *kaarivärityksessä* verkon kaarille määrätään värit, yksi väri kullekin kaarelle. Verkon G *k-kaariväritystä* voidaan kuvata funktiolla $c : E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ verkon kaarien joukosta käytettävien värien joukkoon. [3, s. 249]

Määritelmä 5.1.2. Verkko on *aidosti kaariväritetty*, jos verkon vierekkäiset kaaret on väritetty eri väreillä. [3, s. 249]

Määritelmä 5.1.3. Verkon G sanotaan olevan *k-kaariväritettävä*, jos sillä on aito k-kaariväritys. [3, s. 249]

Aito kaariväritys on kaikkein yleisin tapa värittää kaaria. Jatkossa käytettäessä nimitystä verkon kaariväritys tarkoitetaan aitoa kaariväritystä.

Kuten verkkojen solmuvärityksissä myös kaarivärityksissä ollaan kiinnostuneita käyttämään vähimmäismäärää värejä. Solmuväritysten kromaattista lukua kaarivärityksissä vastaa kromaattinen indeksi.

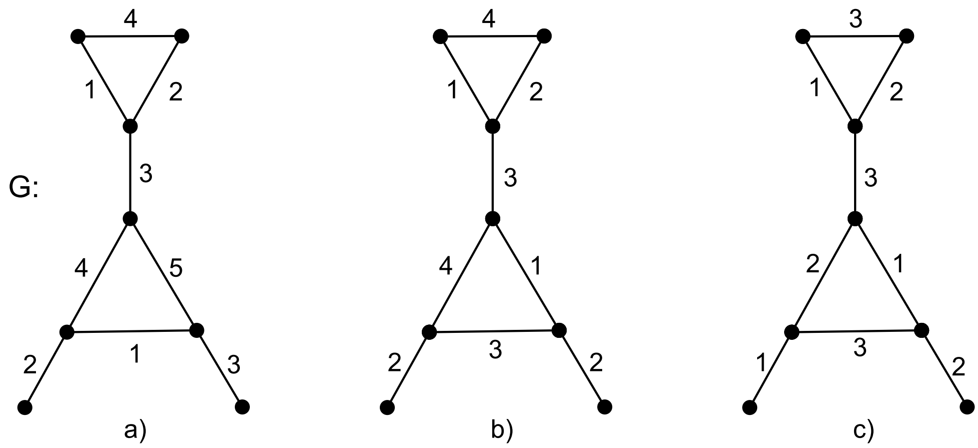
Määritelmä 5.1.4. Verkon G *kromaattinen indeksi* $\chi'(G)$ on pienin positiivinen kokonaisluku k, jolla verkko G on k-kaariväritettävä. [3, ss. 249-250]

Esimerkki 5.1.5. Kuvassa 33 on esitetty erään verkon G kaarivärityksiä: a) kohdassa on verkon 5-kaariväritys, b) kohdassa 4-kaariväritys ja c) kohdassa 3-kaariväritys. Koska verkko G on 3-kaariväritettävä, verkon kromaattinen indeksi $\chi'(G) \leq 3$. Toisaalta G sisältää kolme keskinäisesti vierekkäistä kaarta (itse asiassa useamman tällaisen kolmen kaaren joukon), joten vähintään kolme eri väriä vaaditaan mihin tahansa verkon G kaariväritykseen ja siten $\chi'(G) \geq 3$. Näin ollen verkon kromaattinen indeksi $\chi'(G) = 3$.

Verkon kaariväritys jakaa verkon kaaret väriluokkiin värityksessä käytettävien värien suhteen.

Määritelmä 5.1.6. Kaarien joukon $E(G)$ epätyhjät joukot $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ovat verkolle G annetun k-kaarivärityksen *kaariväriluokat*. Verkon k-kaariväritys on tehty käyttämällä värejä $1, 2, \ldots, k$ ja joukko E_i $(1 \leq i \leq k)$ muodostuu niistä verkon kaarista, jotka on väritetty värillä i. [3, s. 250]

Määritelmä 5.1.7. Verkon G kaarien joukko M on *riippumaton*, jos mitkä tahansa kaksi joukon M kaarta eivät ole vierekkäiset. [3, s. 98]



Kuva 33: Verkon G kaarivärityksiä.

Epätyhjät joukot $\{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$ aiheuttaa kaarien $E(G)$ jakamisen kaariväriluokkiin. Koska aidossa kaarivärityksessä verkon G vierekkäiset kaaret on väritetty eri väreillä, jokainen väriluokka koostuu verkon G riippumattomien kaarien joukosta. Erityisesti verkon kromaattinen indeksi on pienin määrä riippumattomien kaarien joukkoja, johon $E(G)$ voidaan jakaa. Lisäksi jos $\chi'(G) = k$ jollekin verkolle G, niin kaikkien verkon k-kaarivääritysten täytyy tuottaa ainoastaan k epätyhjää kaariväriluokkaa. [3, s. 250]

5.2 Kromaattisen indeksin rajoista

Verkon kaarivärityksen kromaattisen indeksin ratkaisemista helpottaa kromaattiselle indeksille pätevät ala- ja ylärajat. Kaariväritystä tehtäessä on huomioitava verkossa olevat rinnakkaiset kaaret, jotka kasvattavat verkon kromaattisen indeksin arvoa. Multiverkoille onkin olemassa omat kromaattisen indeksin ylärajat.

Määritellään seuraavaksi riippumattoman kaariluvun käsite, jonka avulla saadaan yksi arvio verkon kromaattisen indeksin alarajasta.

Määritelmä 5.2.1. Suurinta kaarien lukumäärää verkon G kaarien riippumattomassa joukossa kutsutaan *riippumattomaksi kaariluvuksi* ja sitä merkitään $\alpha'(G)$. [3, s. 98]

Jos verkossa G on n solmua, niin riippumaton kaariluku $\alpha'(G) \leq n/2$. Seuraava Lause 5.2.2 antaa yksinkertaisen mutta hyödyllisen alarajan verkon kromaattiselle indeksille. Lisäksi se on analoginen Lauseessa 3.2.5 esitetyn verkon kromaattisen luvun alarajan kanssa. [3, s. 250]

Lause 5.2.2. *Jos verkossa G on m (≥ 1) kaarta, niin*

$$\chi'(G) \geq \frac{m}{\alpha'(G)}.$$

Todistus. Oletetaan, että verkon G kromaattinen indeksi $\chi'(G) = k$. Oletetaan lisäksi, että $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ovat kaariväriluokat k-kaarivärityksessä. Näin ollen $|E_i| \leq \alpha'(G)$ kaikilla i ($1 \leq i \leq k$). Joten

$$m = |E(G)| = \sum_{i=1}^{k} |E_i| \leq k\alpha'(G)$$

ja siten $\chi'(G) = k \geq \frac{m}{\alpha'(G)}$. [3, ss. 250-251] □

Kaikissa aidoissa kaarivärityksissä verkon vierekkäiset kaaret on väritettävä eri väreillä. Tarkastelemalla verkon mitä tahansa solmua v huomataan, että tarvitaan $\deg(v)$ väriä värittämään kaaret, jotka lähtevät solmusta v. Näin ollen saadaan toinen alaraja verkon kromaattiselle indeksille käyttämällä verkon suurinta astetta $\Delta(G)$.

Lause 5.2.3. *Jokaiselle epätyhjälle verkolle G*

$$\chi'(G) \geq \Delta(G). \text{ [3, s. 251]}$$

Verkon G kromaattisen indeksin alaraja $\Delta(G)$ on siis melko ilmeinen. Venäläinen matemaatikko Vadim G. Vizing (s. 1937) osoitti merkittävän ylärajan yksinkertaisen verkon kromaattiselle indeksille. Vizingin lause julkaistiin ensimmäisen kerran vuonna 1964 siperialaisessa aikakausjulkaisussa *Metody Diskret. Analiz.* otsikolla *On an estimate of the chromatic class of a p-graph.* Lausetta on pidetty yhtenä päälauseena kaarivärityksen saralla ja se löytyy useimmista verkkoteorian oppikirjoista. [6]

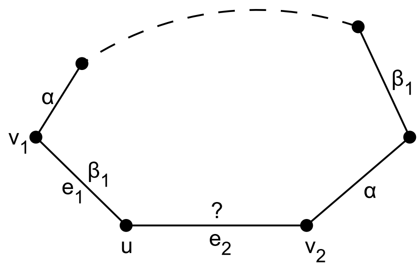
Lause 5.2.4 (Vizingin lause). *Jokaiselle epätyhjälle yksinkertaiselle verkolle G pätee*

$$\chi'(G) \leq 1 + \Delta(G).$$

Todistus. Todistetaan lause induktiolla verkon G kaarien lukumäärän $m = |E(G)|$ suhteen. Kun $m = 1$ lause on tosi. Valitaan verkon G mikä tahansa kaari $e_1 = uv_1$ ja oletetaan, että verkko $G - e_1$ on väritetty käyttäen $\Delta(G)+1$ väriä. Käytetään tätä verkon $G - e_1$ väritystä verkon G värityksen muodostamisessa. Mille tahansa kahdelle värille α ja β olkoon $G(\alpha, \beta)$ verkon G se aliverkko, jonka kaaret ovat juuri ne verkon G kaaret, jotka on väritetty joko värillä α tai β. Selvästi aliverkon $G(\alpha, \beta)$ yhtenäiset komponentit ovat polkuja tai parillisia syklejä, joiden kaaret on väritetty vuorotellen väreillä α ja β.

Huomataan, että yhtenäisessä aliverkossa $G(\alpha, \beta)$ värien α ja β vaihtaminen keskenään tuottaa edelleen koko verkon aidon värityksen.

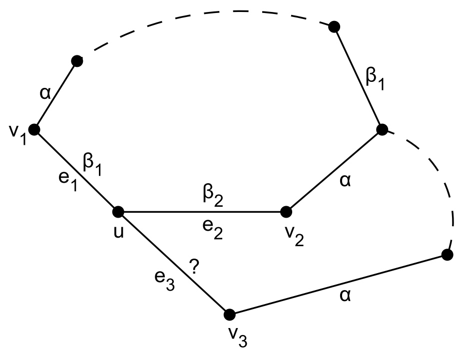
Koska jokaisen solmun v aste on korkeintaan $\Delta(G)$, on vähintään yksi väri γ, joka puuttuu solmusta v verkon $G - e_1$ värityksessä. Millään solmusta v lähtevällä kaarella ei siis ole väriä γ. Jos sama väri puuttuu solmuista u ja v_1, tämä väri voidaan asettaa kaarelle e_1. Oletetaan sen takia, että väri α puuttuu solmusta u ja väri $\beta_1 \neq \alpha$ puuttuu solmusta v_1. Lisäksi voidaan olettaa, että joku solmusta v_1 lähtevistä kaarista on väritetty värillä α ja joku kaari $e_2 = uv_2$ on väritetty värillä β_1. Muutetaan annettua väritystä seuraavalla tavalla: asetetaan väri β_1 kaarelle e_1 ja jätetään kaari e_2 tällä hetkellä ilman väriä. Jos α on väri, joka puuttuu solmusta v_2, voidaan e_2 värittää värillä α. Joten oletetaan, että α on asetettu jollekin solmusta v_2 lähtevälle kaarelle. Jos solmut u, v_1 ja v_2 eivät kuulu samaan yhtenäiseen komponenttiin $G(\alpha, \beta_1)$, voidaan vaihtaa värit α ja β_1 solmun v_2 sisältävässä komponentissa, jolloin väri α puuttuu solmusta v_2. Väri α puuttuu edelleen solmusta u ja siten α voidaan asettaa kaarelle e_2. Muuten solmut u, v_1 ja v_2 kuuluvat samaan yhtenäiseen komponenttiin $G(\alpha, \beta_1)$, jolloin on olemassa polku solmusta u solmuun v_2 vuorotellen väreillä α ja β_1 väritettynä. Tämä polku yhdessä vielä värittämättömän kaaren e_2 kanssa muodostaa syklin (Kuva 34).



Kuva 34: Sykli verkossa G.

Oletetaan sitten, että solmusta v_2 puuttuu väri $\beta_2 \neq \beta_1$. Voidaan lisäksi olettaa, että tämä väri esiintyy solmussa u, sillä muuten asettamalla väri β_2 kaarelle e_2 saadaan haluttu väritys. Olkoon $e_3 = uv_3$ se kaari, joka on väritetty värillä β_2. Vaihdetaan jälleen annettu väritys seuraavasti: asetetaan väri β_2 kaarelle e_2 ja jätetään kaari e_3 ilman väriä. Kuten aikaisemmin, voidaan olettaa, että u, v_2 ja v_3 kuuluvat samaan yhtenäiseen komponenttiin $G(\alpha, \beta_2)$. Joten on olemassa polku solmusta u solmuun v_3 väritettynä vuorotellen väreillä α ja β_2. Tämä polku yhdessä vielä värittämättömän kaaren e_3 kanssa muodostaa syklin.

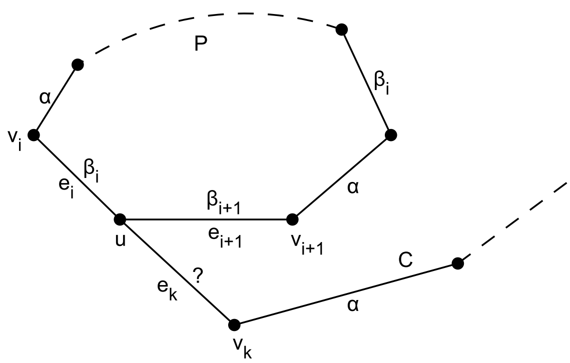
On siis löydetty kaksi vuorottelevaa sykliä, jotka on esitetty Kuvassa 35. Jatketaan värityksen vaihtamista samaan tapaan, kunnes löydetään solmul-



Kuva 35: Kaksi sykliä verkossa G.

le u viereinen solmu v_k, jonka kaari $e_k = uv_k$ ei ole vielä väritetty ja jolle toinen seuraavista kahdesta tapauksesta esiintyy. Joko joku väri $\beta_k \neq \beta_{k-1}$ puuttuu solmusta v_k ja tämä väri puuttuu myös solmusta u, jolloin kaari e_k voidaan värittää tällä värillä. Tai joku väri β_i, jolle $i \leq k-2$, puuttuu solmusta v_k. (Huomataan, että yhden näistä mahdollisuuksista täytyy esiintyä jossain vaiheessa, koska voidaan löytää korkeintaan $\deg(u) \leq \Delta(G)$ solmun u naapuria.) Kuten aikaisemmin u, v_i ja v_{i+1} kuuluvat samaan yhtenäiseen komponenttiin $G(\alpha, \beta_i)$. Tämä komponentti on polku P solmusta u solmuun v_{i+1} vuorotellen väritettynä väreillä α ja β_i. Tämä polku ei sisällä solmua v_k, sillä väri β_i puuttuu solmusta v_k. Näin ollen aliverkon $G(\alpha, \beta_i)$ komponentti C, joka sisältää solmun v_k, on erillinen polusta P (Kuva 36). Nyt vaihdetaan värit α ja β_i keskenään komponentissa C, jolloin voidaan asettaa väri α kaarelle e_k. Siten muodostuu haluttu verkon G $(\Delta+1)$-väritys. [9, ss. 268-270]

$\square$



Kuva 36: Polku P ja erillinen komponentti C.

Solmuvärityksessä rinnakkaisilla kaarilla ei ollut merkitystä verkon kromaattiseen lukuun. On kuitenkin selvää, että rinnakkaisilla kaarilla on suuri vaikutus verkon kromaattiseen indeksiin. Lause 5.2.2 toimii sellaisenaan myös multiverkoille. Huomataan, että erityisesti rinnakkaisten kaarien lukumäärän kasvaessa myös kromaattisen indeksin alaraja kasvaa. Määritellään seuraavaksi verkon suurin kertaluku, jonka avulla voidaan arvioida multiverkon kromaattisen indeksin ylärajaa.

Määritelmä 5.2.5. Multiverkon G *suurin kertaluku* $\mu(G)$ on suurin mahdollinen määrä kaaria, jotka liittyvät samaan pariin solmuja. [3, s. 254]

Vizing ja Ram Prakash Gupta löysivät toisistaan riippumatta multiverkon G kromaattiselle indeksille ylärajan, jossa käytetään hyväksi verkon suurinta kertalukua $\mu(G)$ ja suurinta astetta $\Delta(G)$.

Lause 5.2.6. *Jokaiselle epätyhjälle multiverkolle G*

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G). \text{ [3, s. 254]}$$

Yksinkertaiselle verkolle G Lause 5.2.6 sievenee muotoon $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$, joka on Vizingin lause 5.2.4. Jo aikaisemmin toisen ylärajan multiverkon G kromaattiselle indeksille löysi Claude Elwood Shannon (1916-2001). Shannonin yläraja saadaan ainoastaan verkon suurimman asteen $\Delta(G)$ avulla. Shannonin lause julkastiin vuonna 1949 lehden *Journal of Mathematical Physics* artikkelissa *A theorem on coloring the lines of a network.* [3, s. 254] Shannonin lauseen rajaa asteittain kehittämällä Vizing löysi ylärajan (Lause 5.2.4) yksinkertaisen verkon kromaattiselle indeksille [6].

Lause 5.2.7 (Shannon). *Jos verkko G on multiverkko, niin*

$$\chi'(G) \leq \frac{3\Delta(G)}{2}.$$

Todistus. Oletetaan, että lause on epätosi. Olkoon kaikkien multiverkkojen H, joille $\chi'(H) > 3\Delta(H)/2$, joukossa minimikokoinen verkko G. Olkoon $\Delta(G) = \Delta$ ja $\mu(G) = \mu$. Oletetaan, että $\chi'(G) = k$. Siksi $\chi'(G - f) = k - 1$ kaikilla verkon G kaarilla f. Lauseesta 5.2.6 saadaan $k \leq \Delta + \mu$ ja oletuksesta $k > 3\Delta/2$.

Olkoon u ja v verkon G solmut siten, että μ kaarta yhdistää ne. Olkoon e yksi solmuja u ja v yhdistävistä kaarista. Näin ollen $\chi'(G - e) = k - 1$, joten on olemassa verkon $G - e$ $(k - 1)$-kaariväritys. Solmusta u lähtevien kaarien värityksessä käyttämättömien värien määrä on vähintään $(k-1)-(\Delta-1) = k-\Delta$. Vastaavasti solmusta v lähtevien kaarien värityksessä käyttämättömien värien määrä on vähintään $k - \Delta$.

Jokaisen näistä $k-\Delta$ tai useammasta väristä, joita ei ole käytetty solmusta u lähtevien kaarien värityksessä, täytyy olla käytetty solmusta v lähtevien kaarien väritykseen. Muuten on olemassa vapaana oleva väri kaarelle e, mikä on ristiriidassa oletuksen $\chi'(G) = k$ kanssa. Vastaavasti jokaisen $k - \Delta$ tai useammasta väristä, joita ei ole käytetty solmusta v lähtevien kaarien värityksessä, täytyy olla käytetty solmusta u lähtevien kaarien väritykseen. Siten solmuista u ja v lähtevien kaarien väritykseen käytettyjen värien kokonaismäärä on vähintään

$$2(k-\Delta) + \mu - 1 \leq k - 1.$$

Koska $3\Delta/2 < k \leq \Delta + \mu$, siitä seuraa, että $\mu > \Delta/2$ ja siten

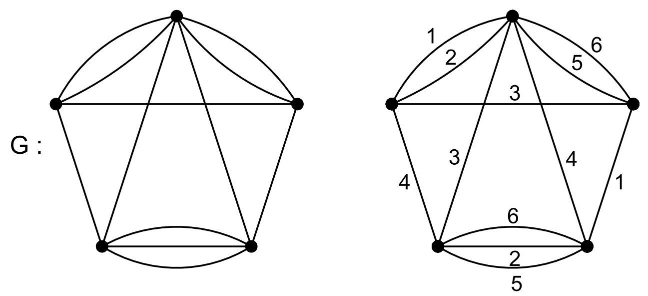
$$2(k-\Delta) + (\Delta/2) - 1 < 2(k-\Delta) + \mu - 1 \leq k - 1.$$

Siksi

$$2k - 2\Delta + \Delta/2 - 1 = 2k - (3\Delta/2) - 1 < k - 1,$$

josta saadaan $k < 3\Delta/2$, mikä on ristiriita. [3, ss. 254-255] □

Esimerkki 5.2.8. Päätellään Kuvan 37 multiverkon G kromaattisen indeksin ylärajat Lauseiden 5.2.6 ja 5.2.7 avulla. Multiverkon G suurin kertaluku $\mu(G) = 3$ ja suurin aste $\Delta(G) = 6$. Lauseen 5.2.6 mukaan $\chi'(G) \leq 9$ ja vastaavasti Shannonin lauseesta 5.2.7 saadaan $\chi'(G) \leq (3 \cdot 6)/2 = 9$. Lauseesta 5.2.3 verkon alarajaksi saadaan $\chi'(G) \geq 6$. Kuvassa 37 on esitetty verkon 6-väritys, joten $\chi' \leq 6$. Näin ollen verkon kromaattinen indeksi $\chi'(G) = 6$. [17, s. 248, tehtävä 12.28.]



Kuva 37: Esimerkin 5.2.8 multiverkko G.

On olemassa tilanteita, joissa Shannonin lause 5.2.7 antaa paremman kromaattisen indeksin ylärajan kuin Lause 5.2.6. Jos verkon suurin aste $\Delta(G)$ on pariton, niin $\frac{3}{2}\Delta(G)$ ei ole kokonaisluku. Siinä tapauksessa rajaa voidaan vahvistaa ja ylärajaksi saadaan $\frac{3}{2}\Delta(G) - \frac{1}{2}$. [3, s. 255] [17, s. 242]

5.3 Luokan 1 ja luokan 2 verkot

Lauseesta 5.2.3 ja Vizingin lauseesta 5.2.4 seuraa, että jokaiselle epätyhjälle verkolle G joko $\chi'(G) = \Delta(G)$ tai $\chi'(G) = 1 + \Delta(G)$. Määritellään näitä kromaattisia indeksejä vastaavat luokat.

Määritelmä 5.3.1. Verkko G kuuluu *luokkaan 1*, jos $\chi'(G) = \Delta(G)$, ja *luokkaan 2*, jos $\chi'(G) = 1 + \Delta(G)$. [3, s. 255]

Kaariväritysten pääongelmana on päätellä, kumpaan luokkaan annettu verkko kuuluu. Kun tarkastellaan useita luokan 1 ja luokan 2 verkkoja, huomataan, että suurella todennäköisyydellä verkko kuuluu luokkaan 1. [3, s. 256]

Tarkastellaan seuraavaksi tunnettuja verkkoja ja sitä, kuuluvatko ne luokkaan 1 vai luokkaan 2. Tutkitaan tarkemmin syklejä. Koska sykli C_n $(n \geq 3)$ on 2-säännöllinen ja verkon suurin aste $\Delta(C_n) = 2$, kromaattinen indeksi $\chi'(C_n) = 2$ tai $\chi'(C_n) = 3$. Jos n on parillinen, niin kaaret voidaan värittää vuorotellen väreillä 1 ja 2, jolloin muodostuu syklin C_n 2-kaariväritys. Jos n on pariton, niin $\alpha'(C_n) = (n-1)/2$. Koska syklissä C_n on n kaarta, niin Lauseesta 5.2.2 seuraa, että $\chi'(C_n) \geq n/\alpha'(C_n) = 2n/(n-1) > 2$, joten $\chi'(C_n) = 3$. Siten

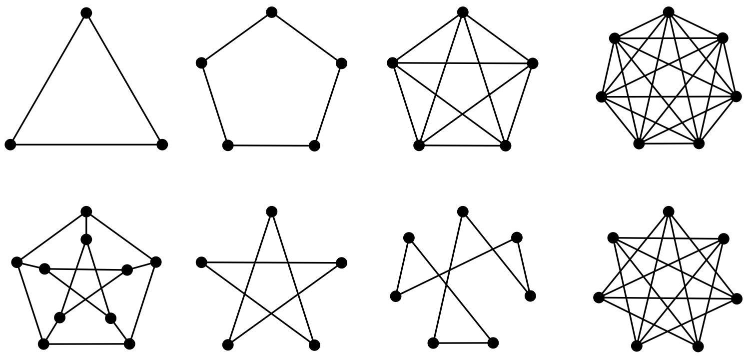
$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{jos } n \text{ on parillinen} \\ 3 & \text{jos } n \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Koska $\Delta(C_n) = 2$, sykli C_n kuuluu luokkaan 1, jos n on parillinen, ja luokkaan 2, jos n on pariton. [3, s. 256]

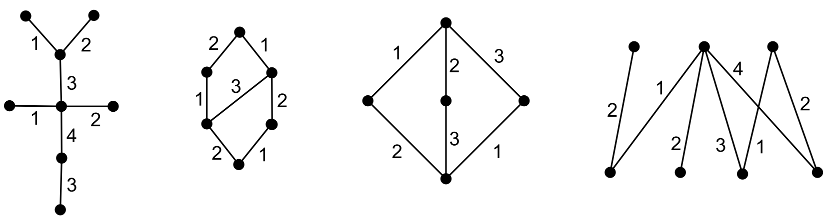
Taulukko 4: Tunnettujen verkkojen luokkia.

Verkko G	$\chi'(G)$	$\Delta(G)$	Luokka
polku P_n	2	2	1
parillinen sykli C_n	2	2	1
pariton sykli C_n	3	2	2
kaksijakoinen verkko G	$\Delta(G)$	$\Delta(G)$	1
puu T	$\Delta(T)$	$\Delta(T)$	1
parillinen täydellinen verkko K_n	$n-1$	$n-1$	1
pariton täydellinen verkko K_n	n	$n-1$	2

Taulukkoon 4 on kerätty eräiden tunnettujen verkkojen kromaattinen indeksi $\chi'(G)$, suurin aste $\Delta(G)$ ja luokka [5, s. 398]. Huomataan, että syklien tapaan parilliset täydelliset verkot kuuluvat luokkaan 1 ja parittomat täydelliset verkot luokkaan 2. Itse asiassa kaikki säännölliset verkot, joissa on pariton määrä solmuja, kuuluvat luokkaan 2 [14]. Kuvassa 38 on luokkaan 2 kuuluvia verkkoja: syklit C_3 ja C_5, täydelliset verkot K_5 ja K_7, Petersenin verkko sekä muita säännöllisiä verkkoja, joissa on pariton määrä solmuja.



Kuva 38: Luokan 2 verkkoja.



Kuva 39: Kaksijakoisia luokan 1 verkkoja. [3, s. 257]

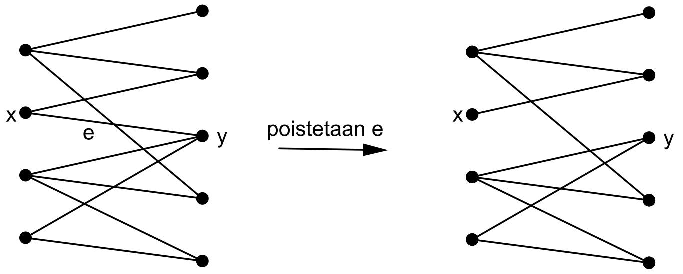
Taulukon 4 mukaan kaksijakoiset verkot kuuluvat luokkaan 1. Kuvan 39 kaikki neljä verkkoa ovat kaksijakoisia ja kuuluvat siten luokkaan 1. Unkarilainen matemaatikko Dénes König (1884-1944) osoitti, että kaksijakoisen verkon kromaattinen indeksi $\chi'(G)$ on aina verkon suurin aste $\Delta(G)$ ja näin ollen kaksijakoinen verkko kuuluu luokkaan 1 [17, s. 243].

Lause 5.3.2 (**Königin lause**). *Jos G on epätyhjä kaksijakoinen verkko, niin*

$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

Todistus. Todistetaan lause käyttämällä induktiota verkon G kaarien lukumäärän m suhteen. Kun $m = 1$, kromaattinen indeksi $\chi'(G) = 1$ ja verkon suurin aste $\Delta(G) = 1$, joten lause on tosi. Oletetaan, että $m > 1$ ja että lause on tosi kaikille kaksijakoisille verkoille, joissa kaaria on vähemmän kuin

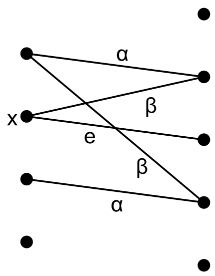
m. Olkoon G kaksijakoinen verkko, jossa on m kaarta ja olkoon $\Delta := \Delta(G)$. Poistetaan Kuvan 40 mukaisesti kaari $e \in E(G)$, missä $e = xy$. Valitaan induktio-oletuksen mukaisesti verkolle $G - e$ Δ-kaariväritys. Lisäksi kutsutaan värillä α väritettyjä kaaria *α-kaariksi* ja värillä β väritettyjä *β-kaariksi*.



Kuva 40: Poistetaan kaari e verkosta G.

Verkon $G - e$ solmuista x ja y lähtee korkeintaan $\Delta - 1$ kaarta. Sen takia on olemassa värit $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, \Delta\}$ siten, että solmusta x ei lähde α-kaarta ja solmusta y ei lähde β-kaarta. Jos $\alpha = \beta$, kaari e voidaan värittää tällä värillä ja todistus on valmis. Oletetaan siis, että $\alpha \neq \beta$ ja että solmusta x lähtee β-kaari.

Muodostetaan solmusta x ja β-kaaresta lähtevä maksimaalinen polku P, jonka kaaret on väritetty vuorotellen väreillä β ja α (Kuva 41). Polku P ei voi sisältää solmua y, sillä polku päättyisi solmuun y ja α-kaareen (solmusta y ei oletuksen mukaan lähde β-kaarta). Polku olisi tällöin parillinen, joten verkon G sykli $P + e$ olisi pariton. Lauseen 2.3.7 mukaan kaksijakoinen verkko ei voi sisältää paritonta sykliä.



Kuva 41: Maksimaalinen polku P.

Väritetään uudelleen kaikki polun P kaaret vaihtamalla värit α ja β keskenään. Verkon $G - e$ vierekkäiset kaaret ovat edelleen eriväriset ja värit solmun y ympärillä pysyivät muuttumattomina. On siis löydetty verkon $G - e$

Δ-kaariväritys, jossa kummastakaan solmusta x tai y ei lähde β-kaarta. Värittämällä kaari e värillä β saadaan verkon G Δ-kaariväritys ja lause on todistettu. [4, s. 103] [17, ss. 243-244] □

5.4 Kaariväritysten soveltaminen

Kaariväritysten avulla mallinnettavat ja ratkaistavat ongelmat liittyvät usein aikataulutukseen. Aikataulutusongelman ratkaisemista kaariväritysten avulla voidaan hyödyntää monella elämän eri osa-alueella. Seuraavaksi tutustutaan urheiluturnausten, koulun lukujärjestysten ja tuotantoprosessin aikataulutukseen.

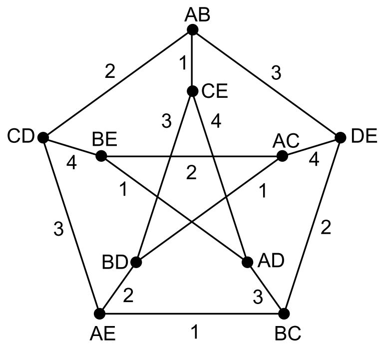
Urheiluturnausten aikataulutus

Täydellisten verkkojen kaariväritystä voidaan käyttää urheilussa *kaikki pelaa kaikkia vastaan* -turnauksien aikataulutukseen. Tällaisissa turnauksissa kaikki kilpailijat (tai joukkueet) pelaavat kaikkia muita kilpailijoita vastaan. Tarkoituksena on ratkaista pienin mahdollinen pelattavien kierrosten määrä, kun kukin kilpailija voi pelata vain yhden ottelun kullakin kierroksella. Tässä sovelluksessa verkon solmut vastaavat turnauksen kilpailijoita, kaaret vastaavat pelattavia otteluita ja värityksessä kaarien värien määrä vastaa kierrosten määrää, jossa ottelut voidaan pelata. Samaan väriluokkaan kuuluvat kaaret vastaavat siis samalla kierroksella pelattavia otteluita. Täydellisen verkon K_n kromaattinen indeksi $\chi'(G)$ on joko $n-1$ tai n. Jos kilpailijoiden määrä n on parillinen, niin tarvitaan $n-1$ kierrosta otteluiden pelaamiseen. Vastaavasti jos kilpailijoita on pariton määrä n, niin tarvitaan n kierrosta otteluiden pelaamiseen.

Seuraavassa esimerkissä tarkastellaan tennispelaajien nelinpeliturnausta, jossa kaikki pelaajista muodostetut parit pelaavat toisiaan vastaan. Verkko muodostetaan edellä kuvatulla tavalla, mutta saatu verkko ei tässä tapauksessa ole täydellinen verkko.

Esimerkki 5.4.1. Eräänä vuonna pelataan tenniksen hyväntekeväisyysturnaus, jossa pelataan vain nelinpelejä. Viisi tennispelaajaa, joita merkitään A, B, C, D ja E, osallistuu turnaukseen. Jokainen tennispelaajien pari $\{W, X\}$ pelaa ottelun kaikkia muita pareja $\{Y, Z\}$ vastaan ja $\{W, X\} \cap \{Y, Z\} = \emptyset$, mutta mikään kahden hengen joukkue ei pelaa kahta peliä saman päivän aikana. Kuinka monta päivää näin järjestetty turnaus kestää?

Muodostetaan verkko G, jonka solmut edustavat kaikkia mahdollisia muodostettuja nelinpelipareja. Siten verkon G solmujen lukumäärä on $\binom{5}{2} = 10$. Kaksi solmua $\{W, X\}$ ja $\{Y, Z\}$ ovat vierekkäiset, jos näillä joukoilla ei ole



Kuva 42: Petersenin verkko ja sen 4-kaariväritys.

yhteisiä alkioita. Kuvassa 42 on esitetty verkko G, joka on Petersenin verkko. Turnauksen kesto saadaan ratkaisemalla verkon G kromaattinen indeksi $\chi'(G)$. Petersenin verkko kuuluu tunnetusti luokkaan 2, joten $\chi'(G) = 1+\Delta(G) = 4$. Verkon 4-kaariväritys on esitetty Kuvassa 42, joten turnaus kestää vähintään neljä päivää. Värityksen kaariväriluokista saadaan eräs mahdollinen aikataulu turnaukselle:

Päivä 1: $AB - CE$, $AC - BD$, $AE - BC$, $AD - BE$
Päivä 2: $AB - CD$, $AC - BE$, $AE - BD$, $BC - DE$
Päivä 3: $AB - DE$, $AD - BC$, $AE - CD$, $BD - CE$
Päivä 4: $AC - DE$, $AD - CE$, $BE - CD$ [3, ss. 259-260]

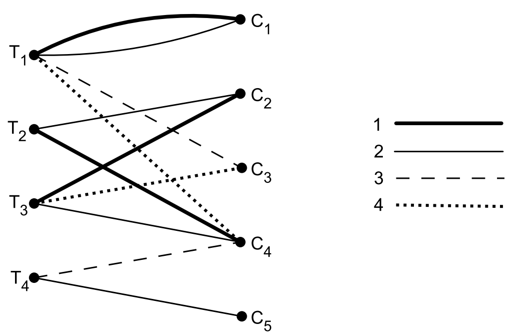
Aikataulutus koulussa

Koulun lukujärjestyksen suunnittelu on tyypillinen verkon kaarivärityksen sovelluskohde. Oletetaan, että koulussa on m opettajaa $T_1, T_2, \ldots, T_m$ ja n koululuokkaa $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Viikon aikana opettajan T_i tulee opettaa luokkaa C_j p_{ij} oppituntia. Muodostetaan kaksijakoinen verkko G, jonka jakojoukot ovat $T = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ ja $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$. Solmuja T_i ja C_j yhdistää p_{ij} kaarta. Millä tahansa oppitunnilla kukin opettaja voi opettaa kerrallaan korkeintaan yhtä koululuokkaa ja kutakin luokkaa voi opettaa kerrallaan korkeintaan yksi opettaja. Lukujärjestyksen pienin tarvittavien oppituntien määrä saadaan ratkaisemalla muodostetun verkon G kromaattinen indeksi. Koska verkko G on kaksijakoinen, Lauseesta 5.3.2 saadaan $\chi'(G) = \Delta(G)$. Siten jos kukaan opettajista ei opeta enempää kuin p oppituntia, ja jos mikään koululuokista ei saa opetusta enempää kuin p oppituntia, opetuksen järjestämiseksi tarvitaan lukujärjestykseen p oppituntia. Seuraava supistettu esimerkki havainnollistaa lukujärjestyksen suunnittelua kaarivärityksen avulla. [2, ss. 96-97]

Esimerkki 5.4.2. Koulussa on neljä opettajaa, jotka opettavat viittä eri koululuokkaa. Taulukossa 5 on esitetty kunkin opettajan opettamat koululuokat ja oppituntien määrät. Muodostetaan kaksijakoinen verkko G, jonka toisen jakojoukon solmut ovat T_1, T_2, T_3 ja T_4 ja toisen C_1, C_2, C_3, C_4 ja C_5. Solmun T_i ja solmun C_j välillä on kaari, jos opettaja T_i opettaa luokkaa C_j. Koska $\Delta(G) = 4$, niin verkon G kromaattinen indeksi $\chi'(G) = 4$. Verkko G ja sen 4-kaariväritys on esitetty Kuvassa 43. Opetuksen järjestämiseen tarvitaan siis lukujärjestyksessä neljä oppituntia. Eräs mahdollinen lukujärjestys on esitetty Taulukossa 6, jossa luvut 1, 2, 3 ja 4 vastaavat kunkin oppitunnin ajanjaksoa. [2, ss. 98-99]

Taulukko 5: Opettajien opettamat koululuokat.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
T_1	2	0	1	1	0
T_2	0	1	0	1	0
T_3	0	1	1	1	0
T_4	0	0	0	1	1



Kuva 43: Muodostettu kaksijakoinen verkko G ja sen 4-väritys.

Lukujärjestysongelmaan on siis täydellinen kaarivärityksen avulla saatava ratkaisu. Tilanne ei kuitenkaan ole niin yksinkertainen, jos vapaana olevien luokkahuoneiden määrää on rajoitettu. Oletetaan, että opetettavana on kaiken kaikkiaan l oppituntia ja ne on aikataulutettu p oppituntia sisältävään

Taulukko 6: Kaarivärityksen avulla saatu aikataulu.

	1	2	3	4
T_1	C_1	C_1	C_3	C_4
T_2	C_4	C_2		
T_3	C_2	C_4		C_3
T_4		C_5	C_4	

lukujärjestykseen. Koska kyseinen lukujärjestys vaatii keskimäärin l/p oppitunnin opettamista samanaikaisesti, on selvää, että tällöin tarvitaan vähintään $\{l/p\}$ luokkahuonetta oppituntien pitämiseen. Itseasiassa l oppituntia voidaan aina järjestää p oppitunnin lukujärjestykseen siten, että tarvitaan korkeintaan $\{l/p\}$ luokkahuonetta. Näin ollen Esimerkin 5.4.2 tapauksessa lukujärjestys voidaan suunnitella siten, että 3 ($> 11/4$) luokkahuonetta riittää oppituntien pitämiseen. [2, s. 97]

Tuotantoprosessin aikataulutus

Tutustutaan tuotantoprosessin aikataulutusongelmaan, kun on annettu töiden joukko $J = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$, koneiden joukko $M = \{M_1, M_2, \ldots, M_m\}$ ja toimintojen joukko $O = \{O_1, O_2, \ldots, O_t\}$. Jokainen toiminto $O_k \in O$ kuuluu tiettyyn työhön $J_j \in J$ ja täytyy suorittaa tietyllä koneella $M_l \in M$ tietyssä annetussa ajassa. Jokainen työ koostuu siis useasta toiminnosta. Tietyn työn eri toimintoja ei voida suorittaa samanaikaisesti ja lisäksi mikään kone ei voi suorittaa kahta toimintoa samanaikaisesti. Oletetaan, että työn eri toiminnot voidaan suorittaa missä tahansa järjestyksessä. Tarkoituksena on muodostaa aikataulu siten, että kaikki toiminnot saadaan suoritettua täydellisesti. Jos kaikki toiminnot ovat samanpituisia, tätä aikataulutusongelmaa voidaan mallintaa kaksijakoisen verkon kaarivärityksellä. [16]

Olkoon verkko G kaksijakoinen verkko, jonka toisen jakojoukon solmut edustavat tuotantoprosessin töitä ja toisen jakojoukon solmut edustavat koneita. Muodostetut jakojoukot ovat siis $\{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$ ja $\{M_1, M_2, \ldots, M_m\}$. Verkon G solmujen J_i ja M_j välillä on kaari, jos työn J_i toiminto suoritetaan koneella M_j. Verkon kaarivärityksen avulla ja ratkaisemalla verkon kromaattinen indeksi saadaan muodostettua aikataulu, jossa käytetään pienintä mahdollista ajanjaksojen määrää. Koska kyseessä on kaksijakoinen verkko, Lauseen 5.3.2 mukaan $\chi'(G) = \Delta(G)$. Värityksessä samaan kaariväriluokkaan kuuluvat toiminnot voidaan suorittaa samanaikaisesti. [16]

Viitteet

[1] Bollobás, B. *Modern Graph Theory.* Graduate Texts in Mathematics (GTM). Springer-Verlag, New York, 1998.

[2] Bondy, J. A. and Murty, U. S. R. *Graph Theory with Applications.* Macmillan Press LTD, London, 1978.

[3] Chartrand, G. and Zhang, P. *Chromatic Graph Theory.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2009.

[4] Diestel, R. *Graph Theory, 2ed.* Graduate Texts in Mathematics (GTM). Springer, New York, 2000.

[5] Gross, J. L. and Yellen, J. *Graph Theory and Its Applications, 2ed.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2006.

[6] Gutin, G. and Toft, B. *Interview with Vadim G. Vizing.* EMS Newsletter No. 38 (December 2000), ss. 22-23. 26.10.2011. [WWW-dokumentti] http://www.emis.de/newsletter/newsletter38.pdf

[7] Harris, J. M., Hirst, J. L. and Mossinghoff, M. J. *Combinatorics and Graph Theory.* Springer-Verlag, New York, 2000.

[8] Heawood, P. J. *Map Colour Theorem.* Quarterly J. Math. Vol. 24 (1890), ss. 332-338.

[9] Jungnickel, D. *Graphs, Networks, and Algorithms, 3ed.* Springer, Berlin, 2008.

[10] Kempe, A. B. *On the Geographical Problem of the Four Colors.* Amer. J. Math. Vol. 2, No. 3 (1879), ss. 193-200.

[11] Lovász, L., Pelikán, J. and Vesztergombi K. *Discrete Mathematics: Elementary and Beyond.* Springer, New York, 2003.

[12] Robertson, N., Sanders, D., Seymour, P. and Thomas, R. *A New Proof of the Four-colour Theorem.* Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. Vol. 2, No. 1 (1996), ss. 17-25.

[13] Vasudev, C. *Graph Theory with Applications.* New Age International, Delhi, 2006.

[14] Weisstein, E. W. *Class 2 Graph.* 30.9.2011. [WWW-dokumentti] http://mathworld.wolfram.com/Class2Graph.html

[15] Weisstein, E. W. *Four-Color Theorem.* 26.8.2011. [WWW-dokumentti] http://mathworld.wolfram.com/Four-ColorTheorem.html

[16] Williamson, D. P., Hoogeveen, J. A., Hurkens, C. A. J., Lenstra, J. K., Sevast'janov, S. V., Shmoys, D. B. and Hall, L. A. *Short Shop Schedules.* Operations Research. Vol. 45, No 2 (1997), ss. 288-294.

[17] Wilson, R. J. and Watkins, J. J. *Graphs: An Introductory Approach* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990.