VALMIIDEN RATKAISUJEN ARVIOINTI SÄHKÖISESTI JA PAPERILLA LUKION MATEMATIIKASSA

Katri Moilanen

Pro gradu -tutkielma

Marraskuu 2019

Fysiikan ja matematiikan laitos

Itä-Suomen yliopisto

Katri Moilanen	Valmiiden ratkaisujen arviointi sähköisesti ja paperilla lukion matematiikassa, 59 sivua
	Itä-Suomen yliopisto, Joensuu
	Matemaattisten aineiden aineenopettajan koulutus
Työn ohjaaja	Yliopistonlehtori Antti Viholainen

Tiivistelmä

Tässä tutkimuksessa haluttiin selvittää, miten opiskelijat suoriutuvat valmiiden ratkaisujen arvioinnista. Lisäksi haluttiin tietää, miten tietokoneella ja paperilla vastaaminen vaikuttaa tuotettuun ratkaisuun ja minkälaisia eroja ratkaisuista voidaan havaita, kun näillä kahdella vastausmuodolla tuotettuja ratkaisuja verrataan keskenään. Tutkimuksen taustalla on lukion opetussuunnitelman perusteista löytyvät tavoitteet, joiden mukaan opiskelijan tulisi keksiä omia matemaattisia ratkaisuja sekä oppia arvioimaan saatuja ratkaisuja kriittisesti. Vastausmuodon vaikutusta matemaattiseen ratkaisuun tutkittiin sen vuoksi, että ylioppilaskirjoitukset ovat muuttuneet sähköisiksi ja eri tutkimuksissa on huomattu eroja sähköisen ja paperilla työskentelyn ja vastaamisen välillä.

Tutkimuksen kohteena oli pitkän matematiikan opiskelijaryhmä, joka suoritti matematiikan kurssin välikokeena neljä tehtävää sisältäneen kokeen. Kokeen kaikki tehtävät olivat tyypiltään valmiiden ratkaisujen arviointia. Tehtävät olivat sijoitettu paperilla ja sähköisellä vastausalustalla niin, että ensin annettiin tehtävänanto ja tähän valmis ratkaisu, jota opiskelijan täytyi arvioida sen oikeellisuuden kannalta ja korjata vääriksi havaitsemansa kohdat ratkaisusta. Koejärjestely oli sellainen, että 22:n opiskelijan ryhmä oli jaettu kahteen pienempään ryhmään A ja B. Ryhmä A suoritti kokeen niin, että ensimmäiset kaksi tehtävää he tekivät sähköisesti tietokoneella ja viimeiset kaksi tehtävää paperilla vastaten. Ryhmä B suoritti samat tehtävä niin, että ensimmäiset kaksi tehtävää he tekivät paperilla ja viimeiset kaksi tehtävää tietokoneella.

Tuloksista voitiin huomata, ettei vastausmuodolla ollut suurta vaikutusta siihen, miten hyvin opiskelijat tehtävistä suoriutuivat. Vastaajaryhmien välillä ei myöskään ollut havaittavissa suurta eroa kokeen menestymisen kannalta. Tietokoneella tehdyt ratkaisut olivat keskimäärin pidempiä kuin paperilla tehdyt ratkaisut ja tietokoneella vastattaessa omaa ratkaisua selitettiin enemmän sanallisesti. Kuitenkaan merkittävää eroa ratkaisuissa ei vastausmuotojen välillä ollut.

Esipuhe

Miettiessäni gradun aihetta keksin, että tutkimus voisi jollain tavalla liittyä siihen, kuinka vastausmuoto vaikuttaa matemaattiseen ratkaisuun. Tähän valintaan vaikutti muuan muassa se, kuinka mediassa tuotiin esille niin opiskelijoiden kuin opettajien kritiikkiä ja huolta tulevaa sähköistyvää matematiikan ylioppilaskoetta kohtaan. Myöhemmin keksin, että aineiston voisi kerätä kokeella, jonka kaikki tehtävät olisivat valmiiden ratkaisujen arviointia. Tutkin lukion opetussuunnitelman perusteita ja huomasin valmiiden ratkaisujen arvioinnin sopivan hyvin opetussuunnitelman asettamiin tavoitteisiin. Tämän tyyppisiä tehtäviä on ollut muutamissa ylioppilaskokeissa, mutta itse tutkimusta tällaisista tehtävistä ei paljoakaan ole. Itse en koskaan lukiossa opiskellessani ollut matematiikan tunneilla valmiiden ratkaisujen arviointia tehnyt ja se olikin minulle uudenlainen tehtävätyyppi. Tästä innostuneena olin varma siitä, että graduni aihe on ajankohtaisuudessaan ja lukio-opintoihin sopivuudessaan valittu oikein ja sen vuoksi se pitikin mielenkiintoani yllä työn kirjoittamisen loppuun asti.

Haluan kiittää ohjaajaani Antti Viholaista hyvistä vinkeistä ja ohjeista työn loppuun saamiseksi. Kiitos myös tutkimukseen osallistuneille opiskelijoille ja heidän opettajalleen, joka antoi minulle mahdollisuuden tutkimuksen toteutukseen. Kiitos myös kaikille niille, jotka ovat jollain tavalla auttaneet minua saamaan tämän työn loppuun. Jo pelkällä kuuntelemisella on ollut tässäkin tapauksessa suuri voima.

Joensuussa 5.11.2019 *Katri Moilanen*

Sisältö

Luku I

Johdanto

Lukion opetussuunnitelman vuoden 2015 perusteissa sanotaan, että yhtenä matematiikan opetuksen tavoitteena on saada opiskelija keksimään matemaattisille ongelmille omia ratkaisuja sekä arvioimaan näihin ongelmiin saatuja ratkaisuja kriittisesti. Lisäksi opetuksen tavoitteena on parantaa opiskelijan taitoja ongelmien käsittelyssä, päättelyssä ja ratkaisemisessa, jotta opiskelijan kyky nähdä matemaattinen tieto loogisena rakenteena parantuu. Matematiikan opetuksen tavoitteisiin kuuluu muun muassa se, että harjoitellaan matemaattisen tiedon esittämistä kuin matemaattisen tekstin lukemista ja lisäksi kannustetaan keskustelemaan matematiikasta.

Omien ratkaisujen arviointitaitoa ja matematiikasta kirjoittamisen taitoa voidaan kehittää esimerkiksi ”what went wrong” – tyyppisillä tehtävillä (Eronen, 2019). Tämän tyyppisissä tehtävissä opiskelija arvioi jo valmista ratkaisua, jonka joku muu on tehnyt kuin hän itse. Tästä ratkaisusta opiskelijan täytyy arvioida ratkaisun ja sen perustelujen täsmällisyyttä. Tällaisten valmiina annettujen ratkaisujen arviointi ja niiden perustelujen oikeellisuuden tulkitseminen on hyödyllistä ja kuuluu olennaisena osana matematiikan opetuksen eri muotoihin. (Eronen, 2019.) Näiden ajankohtaisten seikkojen vuoksi tässä tutkimuksessa toteutetun välikokeen kaikki tehtävät ovat kokonaan tyypiltään valmiiden ratkaisujen arviointia. Tarkoituksena onkin tutkia sitä, miten hyvin opiskelijat onnistuvat arvioimaan valmiina annettuja ratkaisuja ja tällä tavoin herätellä sekä lisätä opiskelijoiden argumentointitaitoja lukion matematiikassa.

Suomen lukioissa on toteutettu uudistus opiskelun ja myös kokeiden tekemisen ja arvioinnin siirtymisestä paperilla työskentelystä sähköiseen työskentelyyn tietokoneella. Viimeisetkin paperisesta sähköiseksi muuttuneet pitkän ja lyhyen matematiikan ylioppilaskokeet (Yle, 2018) kirjoitettiin ensimmäinen kerran sähköisesti maaliskuussa 2019. Ennen matematiikan ylioppilaskokeen muuttumista sähköiseksi ja tämän uudistuksen jälkeen on pohdittu sitä, miten matematiikan sähköistymisestä voidaan hyötyä ja toisaalta sitä, mitä ongelmia syntyy, kun matematiikan ylioppilaskokeet suoritetaan sähköisesti eikä perinteisesti paperilla. On myös mietitty sitä, mitä opiskelijan on otettava huomioon, kun hän rakentaa matemaattista vastausta sähköisesti. Tähän on muun muassa vastattu (Yle, 2018), että tärkeintä matematiikan sähköisessä kokeessa on se, että kokelaan ajattelu on nähtävissä ratkaisuissa sekä sen, ettei tarvitse yrittää tehdä saman näköisiä ratkaisuja kuin paperilla vastattaessa. Tärkeää on se, että opiskelija muistaa matematiikan olevan muutakin kuin oikeiden symbolien ja tiettyjen merkintätapojen oikeanlaista käyttöä.

Tämän uudistuksen, jonka seurauksena opiskelu muutettiin sähköisempään suuntaan, on peruste sille, että tässä tutkimuksessa tutkitaan myös sitä, minkälaisia eroja opiskelijoiden ratkaisuissa on verrattaessa eri vastausmuodolla tehtyjä ratkaisuja ja miten vastausmuoto vaikuttaa opiskelijoiden ratkaisuihin. Vastausmuodolla tarkoitetaan tässä tutkimuksessa perinteistä paperille vastaamista ja sähköisesti tietokoneella vastaamista. Ennen kevään 2019 ensimmäisiä sähköisiä matematiikan pitkän ja lyhyen oppimäärän ylioppilaskokeita oltiin huolissaan muun muassa siitä, että matematiikan kirjoittaminen sähköisesti on aikaa vievää (Yle, 2018). Kevään 2019 molempien oppimäärien ylioppilaskokeeseen liittyneeseen kyselyyn vastanneista 70 % koki, että sähköisen kokeen tekeminen vei enemmän aikaa kuin perinteisen kokeen tekeminen, joten vastausmuotojen välillä on havaittu olevan eroa ainakin ajankäytöllisesti (Yle, 2019b).

Tämän tutkimuksen aineisto kerättiin kokeella, jossa oli neljä tehtävää ja näihin tehtäviin oli annettu valmiit ratkaisut. Tarkoituksena oli, että opiskelijat analysoivat näitä valmiina annettuja ratkaisuja niin, että luettuaan ne opiskelijan täytyisi pohtia, onko tehtävään annettu valmis ratkaisu oikein vai ei. Tämän jälkeen hänen olisi perustellen korjattava ne kohdat ratkaisusta, jotka olivat hänen mielestään väärin. Vastaajat, eli tässä tapauksessa pitkän matematiikan opiskelijoiden ryhmä, oli jaettu kahteen pienempään ryhmään A ja

B, joista ryhmä A kirjoitti ratkaisunsa kahteen ensimmäiseen tehtävään tietokoneella ja tämän jälkeen kahteen viimeiseen tehtävään paperille. Ryhmä B ratkaisi samat tehtävät, mutta aloitti vastaamalla kahteen ensimmäiseen tehtävään paperilla ja kahteen viimeiseen tehtävään tietokoneella. Vastausmuodon vaihtamisella puolessa välissä koetta oli tarkoituksena se, että jokainen opiskelija pääsisi vastaamaan molemmilla tavoilla riippumatta siitä kumpaa vastaustapaa opiskelija itse haluaisi käyttää tai kumman tavan hän itse kokee vahvemmaksi.

Tämä tutkielma jakautuu lukuihin, joista Luvussa 2 käsitellään työn teoriataustaa liittyen muun muassa valmiiden ratkaisujen arviointiin ylioppilaskokeissa sekä sähköisen ja paperilla vastaamisen eroja yleisesti. Luvussa 3 käsitellään tutkimuksen lähtökohtia, jossa esitellään esimerkiksi tarkemmin tutkimuksen toteutusta ja kokeessa olleita tehtäviä. Seuraavassa Luvussa 4 käsitellään tuloksia eli analysoidaan koetehtäviin saatuja ratkaisuja eri kanteilta ja Luvussa 5 on tämän työn pohdinta, jossa käsitellään muun muassa tutkimuksen luotettavuutta ja jatkotutkimusaiheita.

Luku II

Teoreettinen viitekehys

Tutkimuksen teoreettisena viitekehyksenä toimii lukiolaisten matemaattinen ajattelu, osaaminen ja ongelmanratkaisu. Lisäksi käsitellään perustelua ja argumentointia lukiossa, uuden opetussuunnitelman tavoitteita lukion matematiikan opetukselle sekä valmiiden ratkaisujen arviointia ylioppilaskokeissa tehtävätyyppinä. Lopuksi käsitellään sähköistä vastaamista ja eroja, joita paperilla ja sähköisesti tietokoneella vastaamisessa on havaittu olevan.

2.1 Matemaattinen ajattelu

Matemaattinen ajattelu on käsitteenä laaja. Vuoden 2015 lukion opetussuunnitelman perusteissa mainitaan, että:

> *Matematiikan opetuksen tehtävänä on tutustuttaa opiskelija matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin, opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä sekä kehittää laskemisen, ilmiöiden mallintamisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja. (Opetushallitus 2015, s.129.)*

Matemaattista ajattelua ei määritellä sen tarkemmin opetussuunnitelmassa, joka johtunee juuri käsitteen laajuudesta ja sen määrittelyn hankaluudesta. Kuitenkin taustalla on matemaattisen ajattelun kehittäminen. Kilpatrickin ym., (2001) mukaan matemaattinen ajattelu sekä sen käyttäminen kuuluvat matematiikan lisäksi myös laajempaan kontekstiin. Matemaattiseen ajatteluun liittyy herkkyys tunnistaa tilanteita, joissa voidaan käyttää hyväksi erilaisia tekniikoita ja ajattelutapoja. Matemaattisessa ajattelussa keskeisiä ovat konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto, jotka ovat matemaattisen tiedon alalajeja.

Konseptuaalinen eli käsitteellinen tieto on *”semanttinen verkko, jonka solmujen ja linkkien tulkitsemiseen ja rakentamiseen yksilö kykenee osallistumaan, tiedostaen ja ymmärtäen toimintansa perusteet sekä logiikan”* (Haapasalo 2012, s. 53). Konseptuaalisen tieto ilmenee esimerkiksi siten, että yksilö osaa tunnistaa, tuottaa, sanallistaa ja määritellä käsitteitä sekä tunnistaa ja tuottaa esimerkkejä ja niihin liittyviä vastaesimerkkejä. Lisäksi yksilö osaa käyttää käsitteen muodostamiseksi eri esitystapoja sekä muuntaa tietoa eri esitystavoista toiseen. Hän myös ymmärtää käsitteiden eri tulkintoja ja merkityksiä sekä tunnistaa käsitteen ominaisuudet. Yksilö osaa vertailla käsitteitä keskenään ja näkee käsitteiden verkkomaisen rakenteen eli semanttisen verkon.

Proseduraalinen tieto tarkoittaa *”dynaamista ja tarkoituksenmukaista sääntöjen, menetelmien tai algoritmien (toimintakaavojen) suorittamista käyttäen hyväksi tiettyjä esitystapoja”* (Haapasalo 2012, s. 51). Proseduraalisen tiedon käyttäminen yleensä edellyttää yksilöltä esitystapojen taustalla olevien tietojärjestelmän rakenteen ja esitysmuotojen ymmärtämistä. Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että proseduraalisen tiedon käyttäminen vaatisi näiden ominaisuuksien tietoista ajattelua, jos suoritukset ovat jo automatisoituneet laskurutiinin avulla. (Haapasalo, 2012.)

2.2 Matematiikan osaaminen

Valmiiden ratkaisujen arviointia voidaan käyttää matematiikan oppimisen menetelmänä, kun pidetään mielessä se, että matematiikan osaaminen on paljon muutakin kuin mekaanista tehtävien ratkaisemista. PISA 2012 -tutkimukseen liittyvässä PISA12 Ensituloksia -artikkelissa matematiikan osaaminen määritellään seuraavalla tavalla:

> *Matematiikan osaaminen tarkoittaa yksilön kykyä muotoilla, käyttää ja tulkita matematiikkaa erilaisissa tilanteissa. Se pitää sisällään matemaattisen päättelyn sekä matemaattisten tietojen, käsitteiden, menetelmien ja välineiden*

käyttämisen ilmiöiden kuvaamisessa, selittämisessä ja ennustamisessa. Se auttaa yksilöitä tunnistamaan matematiikan merkityksen ympäröivässä maailmassa ja tekemään tarvittavia perusteltuja päätöksiä osallistuvina, rakentavina ja ajattelevina kansalaisina. (Kupari ym., 2013, s. 11)

Matemaattinen osaaminen koostuu (Kilpatrick ym., 2001) mukaan viidestä osatekijästä, mitkä liittyvät edellä mainittuihin matemaattiseen ajatteluun, ymmärtämiseen ja sekä myöhemmin läpi käytävään ongelmanratkaisuun. Nämä tekijät ovat:

1. *Konseptuaalinen ymmärtäminen*, johon kuuluu ymmärrys matemaattisista käsitteistä, operaatioista ja näiden välisistä suhteista.
2. *Proseduraalinen sujuvuus*, joka näkyy taitona toteuttaa matemaattisia menetelmiä joustavasti, täsmällisesti, tehokkaasti ja tarkoituksenmukaisesti.
3. *Strateginen kompetenssi*, joka sisältää taidon muodostaa, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia.
4. *Adaptiivinen päättely*, joka sisältää kyvyn loogiseen ajatteluun, reflektointiin, selityksiin ja perusteluihin.
5. *Yritteliäisyys*, joka koostuu yksilön asenteesta nähdä matematiikka järkevänä, hyödyllisenä ja kannattavana, mikä on kytköksissä yksilön ahkeruuteen ja tehokkuuteen.

Nämä matemaattisen osaamisen tekijät ovat toisistaan riippuvaisia ja niitä kuvataan yleensä toisiinsa punoutuneina säikeinä. Keskittymällä jokaisen säikeen eli osatekijän kehittämiseen, lisää se matemaattista osaamista ja taitavuutta monipuolisesti. (Kilpatrick ym., 2001.)

Konseptuaalinen ymmärtäminen liittyy vahvasti matemaattisen tiedon järjestämiseen, joissa käsitteiden, operaatioiden ja näiden välisten suhteiden ymmärtäminen perustuu yhteyksien määrän runsauteen. Uuden oppiminen ja mieleen palauttaminen on helpompaa hyvin organisoidun tietorakenteen avulla. Ymmärtäen opitun tiedon palauttaminen on helppoa, koska tieto voidaan muotoilla uudelleen. Jos opittu menetelmä on ymmärretty, niin on helpompaa päätellä, onko mieleen palautettu menetelmä matemaattisesti mielekäs ja oikein. (Kilpatrick ym., 2001.)

Proseduraalinen sujuvuus liittyy niin taitoon käyttää matemaattisia menetelmiä kuin siihen, milloin ja miten niitä kuuluisi käyttää. Proseduraalinen harjoittelu vahvistaa matemaattista ymmärrystä ja menetelmän taustalla olevan matemaattisen rakenteen ymmärtäminen vähentää virheen tekemisen todennäköisyyttä. Siten konseptuaalinen ymmärtäminen ja proseduraalinen sujuvuus ovat melko vahvasti kytköksissä toisiinsa. Ymmärryksen muodostumista voi haitata se, että menetelmiä opetetaan ennen kuin itse asia sen taustalla ymmärretään. Menetelmien käyttöön liittyy myös vahvasti saatujen tulosten mielekkyyden arviointi. (Kilpatrick ym., 2001.)

Strateginen kompetenssi vaatii sen, että opiskelija tietää ratkaisustrategioita ja hänellä on kyky soveltaa omia tietojaan ja taitojaan. Ongelman ratkaiseminen lähtee yleensä liikkeelle sen esittämisestä jossakin muodossa, joita voivat olla esimerkiksi graafinen, symbolinen, numeerinen tai sanallinen esitys. Ongelmaa voidaan lähestyä esimerkiksi algebrallisesti, arvaamalla tai päättelemällä tai jollain muulla tavalla. Matemaattisten rakenteiden näkeminen ongelmien taustalla on myös osa strategista kompetenssia. Eri ongelmien ulkoiset seikat voivat hämätä, koska ongelmilla voi olla samanlainen matemaattinen rakenne. Ongelmanratkaisun kannalta onkin tärkeää tunnistaa ongelmien samankaltaisuus ja niiden yhteys matemaattisiin käsitteisiin. Siten strategiseen kompetenssiin liittyy vahvasti proseduraalinen sujuvuus juuri valittujen menetelmien kannalta. (Kilpatrick ym., 2001.)

Adaptiivinen päättely liittyy kykyyn ajatella asioita loogisesti erilaisten tilanteiden ja näihin liittyvien käsitteiden välisistä suhteista. Tähän kuuluu myös todistaminen ja muu deduktiivinen päättely. Myös intuitiivinen ja induktiivinen järkeily liittyvät adaptiiviseen päättelyyn. Olisi oppimisen kannalta tärkeää, että kykenee perustelemaan ja selittämään omat ideansa, jotta ymmärtää omat perustelunsa ja siten kasvattaa konseptuaalista ymmärrystä. (Kilpatrick ym., 2001.)

Kaikkien edellä mainittujen osa-alueiden hallintaa auttaa yritteliäisyys. Kun matematiikka koetaan mielenkiintoiseksi ja hyödylliseksi, motivaatio sitä kohtaan kasvaa sekä ajattelun taidot pääsevät kehittymään. Kun matematiikkaan jaksaa nähdä vaivaa ja uskoo omiin kykyihinsä, niin samalla myös laskutaito, ongelmanratkaisukyvyt ja soveltavien tehtävien hahmottaminen paranevat. (Kilpatrick ym., 2001.)

2.3 Matemaattinen ongelmanratkaisu

Ballew ja Cunningham (1982) jakavat matemaattisen ongelmanratkaisutaidon neljään erilaiseen kykyyn, jotka ovat:

1. *Kyky lukea ongelma*: yksilö tunnistaa ongelman olemassaolon ja sen vaatimukset.
2. *Kyky tulkita ja käsitellä sanallista informaatiota*: yksilö löytää ja käyttää vain ongelman kannalta relevantteja tietoja ja kykenee yhdistämään tehtävänannossa annetut tiedot kokonaisuudeksi.
3. *Kyky suorittaa tarvittavat laskutoimitukset*: yksilö hallitsee peruslaskutoimitukset ja osaa soveltaa tarvittavia laskutoimituksia, jotta tehtävä saadaan ratkaistua.
4. *Kyky yhdistää nämä taidot sanallisen ongelman kokonaisratkaisuksi*: yksilö hallitsee, osaa käyttää ja soveltaa kolmea edellä mainittua kykyä.

Tässä mallissa matemaattisen tiedon käsittely korostuu. Neljäs kyky vaatii kaikkia muita kykyjä toimiakseen, joka taas edellyttää yksilöltä kognitiivisia taitoja.

Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettamista koulussa on tutkittu esimerkiksi Leppäahon väitöskirjassa ”Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa – Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi”. Tässä tutkimuksessa keskityttiin ongelmanratkaisutaidon opettamiseen peruskoulussa, mutta saatuja tuloksia voidaan soveltaa myös lukio-opetuksessa tapahtuvaan ongelmanratkaisuun. Leppäahon tutkimuksessa oppituntien aiheet oli valittu, suunniteltu ja toteutettu siten, että tunnin aiheen oli liityttävä jollain tavalla ongelmanratkaisuun. Lisäksi tuntien täytyi olla käytössä olevan opetussuunnitelman mukainen ja oppituntiin integroitavien oppiaineiden käytön täytyi tukea näiden oppiaineiden sisältöjä. Leppäahon tutkimuksessa tehdyn matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opetus oli lisännyt oppilaiden mielenkiintoa niin ongelmanratkaisua kuin itse matematiikkaa kohtaan. Tutkimuksessa huomattiin, että opetuksen organisointi, matematiikan verbalisointi, opetuksen ongelmakeskeisyys, luokan ilmapiiri ja opetuksen integrointi muihin oppiaineisiin olivat matemaattisen ongelmanratkaisutaidon oppimista tukevia asioita. Tutkimuksessa huomattiin myös, että oppilaiden matematiikan koetulokset paranivat aikaisempiin verrattuna, kun oppitunneilla oli opeteltu ja harjoiteltu matemaattisia ongelmanratkaisutaitoja. (Leppäaho, 2007.)

2.4 Perustelu ja argumentointi lukiossa

Nykyajan tietoyhteiskunnassa kriittisen ajattelun sekä argumentointitaitojen merkitys korostuu ihmisten altistuessa uudelle tiedolle päivittäin. Tällöin uuden tiedon ja sen esitystavan arvioiminen nousee esille tärkeänä taitona eli kriittinen ajattelu pääsee kehittymään luonnontieteiden ja matematiikan kouluopetuksessa melko hyvin. Kriittisellä ajattelulla tarkoitetaan sellaista lähestymistapaa, jolla ajattelun kohdetta tarkastellaan huolellisesti, erittelevästi ja arvioivasti. Kriittinen ajattelija taas antaa uudelle idealle mahdollisuuden ja arvioi, mitkä tekijät tukevat idean toteutumista. Kriittinen ajattelija omaa taitoja muodostaa itsenäisesti harkittuja ja omia perusteluitaan tutkailevia arvioita eri aiheista. Hänellä on tahto säilyttää avoimuus oman ajattelun korjaamiselle ja uusien oivalluksien tekemiselle. (Kurki & Tomperi, 2011.) Argumentti itsessään voidaan nähdä perusteltuna väittämänä, mikä yksinkertaisimmillaan koostuu väitteestä, perusteluista ja viittauksista väitettä tukevaan havaintoaineistoon eli dataan (Osborne, Erduran, Simon & Monk, 2001).

Vuoden 2015 lukion opetussuunnitelman perusteissa yhtenä pitkän matematiikan opetuksen tavoitteena on, että opiskelijaa rohkaistaan muun muassa omien ratkaisujen keksimiseen ja niiden arviointiin kriittisesti. Tärkeää olisi myös ymmärtää ja osata käyttää matematiikan kieltä oikein. Tähän kuuluu esimerkiksi matemaattisen tiedon esittämistä, matemaattisen tekstin lukemista ja matematiikasta keskustelemista. Lisäksi tähän kuuluu se, että opiskelija oppii arvostamaan matemaattisten esityksien täsmällisyyttä sekä perustelujen selkeyttä. Opetuksen tavoitteena on myös kehittää opiskelijan kykyä käsitellä, päätellä ja ratkaista ongelmia, mitkä auttavat opiskelijaa näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena. (Opetushallitus, 2015.)

Lisäksi opetuksen tavoitteisiin kuuluu, että opiskelija tottuu tarkastelemaan matemaattista tietoa sen ominaisella tavalla. Opiskelija tottuu oletuksien tekoon sekä niiden täsmällisyyden tutkimiseen. Tähän kuuluu myös oletuksien perustelut sekä näiden perustelujen pätevyyden arviointi ja tulosten mahdollinen yleistettävyys. Näiden apuna opiskelijan on osattava käyttää asianmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä sekä tietolähteitä. (Opetushallitus, 2015.)

Ylioppilastutkintolautakunta teetti kyselyn tammikuussa 2017 matematiikan, fysiikan ja kemian opettajille, jolla haluttiin kerätä tietoa siitä, mikä näiden alojen opettajia mietityttää digitaaliseen tutkintoon siirtymisessä. Yksi opettajia askarruttaneista aiheista oli esimerkiksi se, kuinka laajasti ylioppilaskokeissa opiskelijoiden tekemissä matematiikan vastauksissa täytyisi näkyä välivaiheet. Ylioppilastutkintolautakunta oli vastannut, että välivaiheiden sijaan kannattaisi puhua vastauksen perusteluista. Opiskelijan tulisi pystyä tuottamaan sellainen päättelyketju, joka antaa tehtävänantoon riittävän ratkaisun. Matemaattisten vastauksien tuottaminen vaatii lukion opiskelijalta digitaalisten ohjelmistojen oikeanlaista käyttöä asianmukaisissa tilanteissa. (Ylioppilastutkintolautakunta, 2017a.)

Jokaisen ylioppilaskokeen jälkeen julkaistaan hyvän vastauksen piirteet. Esimerkiksi kevään 2019 matematiikan pitkän oppimäärän ylioppilaskokeen hyvän vastauksen piirteissä (Ylioppilastutkintolautakunta, 2019b) on määritelty se, minkälainen on hyvä tehtäväsuoritus. Kriteereinä on muun muassa se, että ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut niihin rinnastettavat perustelut sekä lopputulos. Kokonaisuus ratkaisee arvioinnissa ja ratkaisua on tarkoitus arvioida kolmessa osassa huomioiden ratkaisun alku, välivaiheet sekä lopputulos. Laskimen rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti ja esimerkiksi symbolisen laskimen käyttö on tultava ilmi vastauksesta. Pelkän vastauksen antaminen ilman muita perusteluja analysointia vaativissa tehtävissä ei ole hyvän vastauksen piirteiden mukaisesti perusteltu vastaus. Pelkän vastauksen ilmoittaminen rutiinitehtävissä sekä laajempien tehtävien rutiiniosissa laskimella laskettu tulos tavallisesti riittää. (Ylioppilastutkintolautakunta, 2019c.)

2.5 Uuden opetussuunnitelman tavoitteita

Uuden lukiolain tullessa voimaan 1.8.2019 joudutaan uusimaan myös käytössä oleva lukion opetussuunnitelma, joka julkaistaan marraskuussa 2019. Tämä velvoittaa lukiokoulutuksen järjestäjiä elokuusta 2021 alkaen. (Opetushallitus, 2019b.) Matematiikan osalta lukion opetussuunnitelman perusteiden vuoden 2019 luonnoksessa matematiikan opetuksen tavoitteena on, että opiskelija saa myönteisiä kokemuksia, tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn sekä oppii luottamaan omiin matemaattisiin kykyihin, taitoihin ja ajatteluun. Lisäksi opiskelija ymmärtää matematiikan niin itsenäisenä tieteenalana kuin välineenä, jota käytetään apuna yhteiskunnan, talouden tai luonnon ilmiöiden mallintamiseen tai ennustamiseen. (Opetushallitus, 2019a.)

Uutena lisänä on myös se, että vahvistetaan opiskelijan matemaattisia valmiuksia jatko-opintojen kannalta. Tarkoituksena on myös se, että opiskelija harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntää niihin erilaisia ratkaisustrategioita. Lisäksi tarkoituksena on, että opiskelija uskaltaa kokeilla, tutkia ja keksiä matemaattisiin ongelmiin ratkaisuja sekä esittää omia ratkaisujaan selkeästi. (Opetushallitus, 2019a.) Muuten uudessa lukion opetussuunnitelman luonnoksessa tavoitteet matematiikan osalta ovat melko samat kuin aiemmassa vuoden 2015 lukion opetussuunnitelmassa, mutta uudessa korostuu enemmän opiskelijan oma aktiivinen toiminta sekä vastausten ja niissä olevien omien ratkaisumenetelmien perustelu.

2.6 Ratkaisujen arviointi

Tämän tutkimuksen yhteydessä valmiiden ratkaisujen arvioinnilla tarkoitetaan valmiina annetun ratkaisun mahdollisten virheiden tunnistamista ja niiden korjaamista perustellen tai annetun ratkaisun tunnistamista oikeaksi. Lukion opetussuunnitelman perusteissa yleisesti matematiikan arvioinnista lukiokoulutuksessa sanotaan, että arvioinnissa on kiinnitettävä huomiota *”laskutaitoon, menetelmien ja teknisten apuvälineitten valintaan ja käyttöön sekä päätelmien täsmälliseen ja johdonmukaiseen perustelemiseen”* (Opetushallitus 2015, s. 129.) Siten valmiiksi ratkaistujen tehtävien arviointi tehtävätyyppinä tukee yleisesti lukiossa käytössä olevaa arviointikulttuuria.

Ratkaisujen arviointia lukion matematiikassa on tutkittu esimerkiksi Jankon (2015) Pro gradu -tutkielmassa ”Valmiiden ratkaisujen arviointi lukion pitkän matematiikan oppimismenetelmänä”. Tutkimuksen tavoitteena oli selvittää, miten pitkän matematiikan opiskelijat kokevat valmiiden ratkaisujen arvioinnin oppimismenetelmänä sekä onko perusteltua käyttää lukiossa tällaista menetelmää. Tutkimuksen tulokseksi oli saatu, että oppijat itse kokivat valmiiden ratkaisujen arvioinnin hyvänä oppimismenetelmänä ja vaikeusasteiltaan ratkaisujen arviointi sekä arviointien perusteleminen olivat tuntuneet sopivan vaikeilta tehtäviltä, mutta eivät kuitenkaan ylitsepääsemättömiltä. Opiskelijoiden mielestä tällaista oppimismenetelmää tulisi käyttää vain rajoitetusti eikä se saisi syrjäyttää itse tehtävien ratkaisemista. Lisäksi oppijat olivat kokeneet oppimistilanteet sitä opettavaisempina, mitä enemmän tilanteissa oli laskettu. Tätä perusteltiin esimerkiksi siten, että muunlaisten oppimismenetelmien käytöstä lukiolaisilla on kokemusta hyvin vähän. (Jankko, 2015.) Valmiiden ratkaisujen arviointia on toteutettu myös ryhmässä tehtynä, jolloin ryhmälle on annettu pohdittavaksi jo jonkin vanhan kokeen tehtävään tehty valmis ratkaisu, koska sen on ajateltu lisäävän opiskelijoiden arviointitaitoja ja samalla myös heidän matemaattiset taitonsa kehittyvät (Eronen, 2019).

2.6.1 Valmiiden ratkaisujen arviointi ylioppilaskokeissa

Tehtävätyyppinä valmiiden ratkaisujen arviointi on melko uusi, jonka vuoksi sitä ei ole ollut paljoakaan esimerkiksi matematiikassa tehtävätyyppinä kummankaan oppimäärän ylioppilaskokeissa. Uusimman eli vuoden 2015 lukion opetussuunnitelman käyttöönoton jälkeen pitkän oppimäärän matematiikan ylioppilaskokeissa valmiiden ratkaisujen arviointia on ollut vuoden 2017 alusta jokaisessa kokeessa, myös ensimmäisessä sähköisessä ylioppilaskokeessa keväällä 2019. Näissä viidessä kokeessa valmiiden ratkaisujen arviointia on ollut yhden tehtävän tai osatehtävän verran jokaista koetta kohden. (Yle, 2019a.)

Ennen vuotta 2017 järjestetyissä pitkän ja lyhyen oppimäärän matematiikan ylioppilaskokeissa valmiiden ratkaisujen arviointia ei ole ollut. Tähän on vaikuttanut mitä luultavimmin se, että vuoden 2015 lukion opetussuunnitelma otettiin käyttöön 1.8.2016 ensimmäisenä lukion aloittavilla opiskelijoilla ja tämän jälkeen opetussuunnitelman käyttöönotto eteni aloittava vuosiluokka kerrallaan. (Opetushallitus, 2015.)

Ylioppilastutkintolautakunnan vuoden 2018 matematiikan digitaalisen kokeen määräyksien mukaan koesuorituksia arvioitaessa kiinnitetään huomiota muun muassa siihen, että ratkaisussa näkyy laskut ja muut perustelut sekä lopputulos tehtävänannon ohjeistuksen mukaan. Hyvin tehdystä suorituksesta näkyy, miten opiskelija on päätynyt saatuun vastaukseen. Tämän lisäksi on huomioitava, että vastauksen on oltava riittävän selkeä, jotta tarkastaja ymmärtää vastauksen merkityksen. Merkinnät eivät saa mennä vastauksessa sekaisin ja valittua merkintätapaa on hyvä tukea selityksillä, ellei kyseessä oli kansallisten käytäntöjen mukainen merkintätapa. Ylioppilaskokeissa käytössä olevia ohjelmia saa käyttää tehtävää ratkaistaessa hyväksi ja sen tuottamaa ratkaisua ei tarvitse kirjoittaa uudelleen, jos sillä tavoin saatu ratkaisuesitys on itsessään selkeä. (Ylioppilastutkintolautakunta, 2018c.) Nämä ohjeistukset koskevat ylioppilaskokeiden tarkistajia, eli opettajia sekä Ylioppilastutkintolautakunnan sensoreita, mutta näitä ohjeistuksia soveltaen ja noudattaen myös opiskelijat voivat arvioida valmiiksi annettuja ratkaisuja.

Kevään 2017 pitkän matematiikan ylioppilaskokeen tehtävässä 10 (Kuva 1) täytyi arvioida kolmen henkilön tekemiä vastauksia ja kertoa sen jälkeen, kenen tekemä vastaus on oikein. Tehtävänannossa on myös käsketty etsiä väärien ratkaisujen virheet sekä esittää näiden tilalla korjatut ratkaisut. (Ylioppilastutkintolautakunta, 2017b.)

Tiedetään, että $h(x) = g(f(x))$, $f(x) = e^x$ ja $g(x) = 2x^2 + 1$. Elmeri ja Uolevi laskevat derivaatan $h'(x)$ seuraavalla tavalla:

Elmerin ratkaisu:	Uolevin ratkaisu:
$f(x) = e^x$ $g'(x) = 4x$ joten $h'(x) = g'(f(x)) = 4e^x$	$h(x) = g(f(x)) = 2(e^x)^2 + 1 = 2e^{x^2} + 1$ $h'(x) = 2e^{x^2} \cdot (2x)$ joten $h'(x) = 4xe^{x^2}$

Mari saa laskimella vastaukseksi $4e^{2x}$. Kenen vastaus on oikein? Etsi väärien ratkaisujen virheet ja esitä korjatut ratkaisut.

Kuva 1. Kevään 2017 pitkän matematiikan ylioppilaskokeen tehtävä 10. (Ylioppilastutkintolautakunta, 2017b)

Vuoden 2017 syksyn kokeen tehtävässä 2 (Kuva 2) on annettu kahteen eri yhtälöön ratkaisut. Ratkaisuissa välivaiheet ovat menneet sekaisin ja b-kohtaan on lisätty yksi ylimääräinen välivaihe, joka ei kuulu tehtävän ratkaisuun. Opiskelijan täytyi tässä tehtävässä järjestää välivaiheet oikeaan järjestykseen. (Ylioppilastutkintolautakunta, 2017c.)

2. a) Hannele on ratkaissut yhtälön

$$2(x^2 + x + 3) = 8(x + 1) + 2x^2,$$

mutta välivaiheet ovat menneet sekaisin.

Merkitse välivaiheet (B)–(F) alla olevaan taulukkoon niin, että ne muodostavat yhtälön loogisesti etenevän ratkaisun. Vastausta ei tarvitse perustella.

(A) $2(x^2 + x + 3) = 8(x + 1) + 2x^2$

(B) $\boxed{-3x = 1}$

(C) $\boxed{x + 3 = 4(x + 1)}$

(D) $\boxed{x + 3 - 4 - x = 4x + 4 - 4 - x}$

(E) $\boxed{x + 3 = 4x + 4}$

(F) $\boxed{x^2 + x + 3 = 4(x + 1) + x^2}$

(G) $x = -\frac{1}{3}$

Välivaiheen järjestysnumero	1	2	3	4	5	6	7
Välivaihe	A						G

b) Myös Pauliinan laskun välivaiheet ovat menneet sekaisin, ja lisäksi mukaan on tullut yksi johonkin muuhun laskuun kuuluva välivaihe.

Tehtävänä on valita alla olevista kohdista (B)–(F) neljä ja järjestää ne niin, että niistä muodostuu yhtälön

$$20 + 4x = x^2 + 8$$

ratkaisu. Vastausta ei tarvitse perustella.

(A) $20 + 4x = x^2 + 8$

(B) $\boxed{x^2 - 4x = 12}$

(C) $\boxed{x^2 + 4x + 16 = 0}$

(D) $\boxed{x - 2 = \pm 4}$

(E) $\boxed{x^2 - 4x + 4 = 16}$

(F) $\boxed{(x - 2)^2 = 4^2}$

(G) $x = -2$ tai $x = 6$

Välivaiheen järjestysnumero	1	2	3	4	5	6
Välivaihe	A					G

Kuva 2. Syksyn 2017 pitkän matematiikan ylioppilaskokeen tehtävä 2. (Ylioppilastutkintolautakunta, 2017c)

Kevään 2018 kokeen tehtävässä 10 (Kuva 3) on annettu kaksi valmista ratkaisua, jotka on perusteltu eri tavoilla. Näissä molemmissa ratkaisuissa on kuitenkin lopulta päädytty samaan ratkaisuun. Opiskelijan täytyi tehtävän a-kohdassa perustella, mitä matemaattisia kaavoja ratkaisuissa on käytetty, tehtävän b-kohdassa esittää graafisesti opiskelijan ratkaisuun liittyvä päättely sekä c-kohdassa selittää toisen opiskelijan ratkaisun eteneminen alusta loppuun vaiheittain. (Ylioppilastutkintolautakunta, 2018a.)

Annukka ja Fareed yrittävät laskea seuraavien vektoreiden pistetulon ilman laskinta:

$$\overline{u} = 7\cos\frac{\pi}{5}\,\overline{i} + 7\sin\frac{\pi}{5}\,\overline{j} \quad \text{ja} \quad \overline{v} = 3\cos\frac{8\pi}{15}\,\overline{i} + 3\sin\frac{8\pi}{15}\,\overline{j}.$$

Heidän ratkaisunsa ovat seuraavat.

Annukan ratkaisu	Fareedin ratkaisu
$\overline{u}\cdot\overline{v} = 7\big(\cos\frac{\pi}{5}\,\overline{i}+\sin\frac{\pi}{5}\,\overline{j}\,\big)\cdot 3\big(\cos\frac{8\pi}{15}\,\overline{i}+\sin\frac{8\pi}{15}\,\overline{j}\,\big)$	Vektorien pituudet: $\lvert\overline{u}\rvert = 7$ ja $\lvert\overline{v}\rvert = 3$
$= 21(\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{8\pi}{15} + \sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{8\pi}{15})$	Pistetulon kaava: $\overline{u}\cdot\overline{v} = 7\cdot 3\cos(\overline{u},\overline{v})$
$= 21\cos(\frac{8\pi}{15} - \frac{\pi}{5})$	Vektorien välinen kulma: $\frac{8\pi}{15} - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{3}$
$= 21\cos\frac{\pi}{3} = \frac{21}{2}$.	Siten $\overline{u}\cdot\overline{v} = 21\cos\frac{\pi}{3} = \frac{21}{2}$.

a) Annukka ja Fareed ovat käyttäneet eri kaavoja pistetulon laskemiseksi. Esitä nämä kaavat yleisille vektoreille $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j}$ ja $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j}$.

b) Fareed on laskenut vektorien pituudet ja niiden välisen kulman. Esitä vektorit graafisesti ja merkitse kuvaan, miten Fareed on päätellyt vektorien välisen kulman.

c) Selitä lyhyesti rivi riviltä, miten Annukan ratkaisu etenee.

Kuva 3. Kevään 2018 pitkän matematiikan ylioppilaskokeen tehtävä 10. (Ylioppilastutkintolautakunta, 2018a)

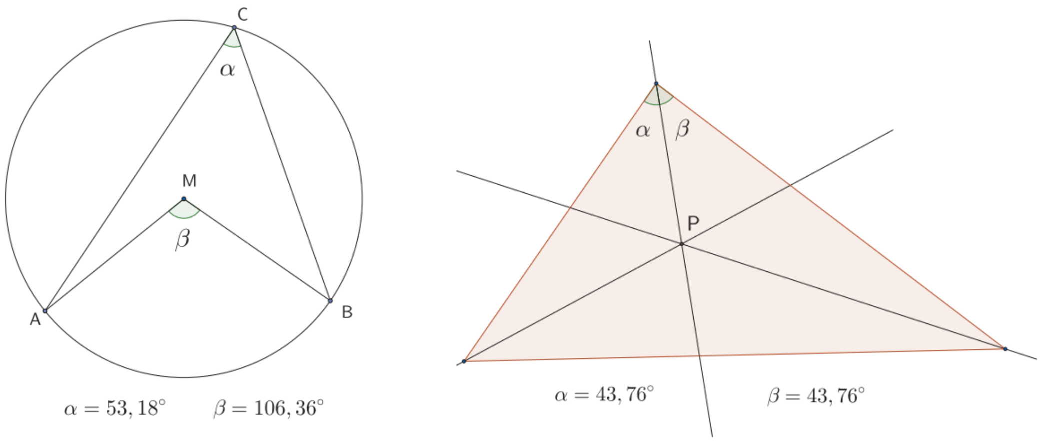
Vuoden 2018 syksyn kokeen tehtävässä 11 (Kuva 4) on annettuna valmiina kaksi kuvaa ja näiden kuvissa olevien geometristen kuvioiden avulla on vietävä tehtävän tarkastelu loppuun. Mitään valmista ratkaisua ei tässä tehtävässä ole, mutta tehtävässä annetaan olettaa, että kuviot ovat opiskelijan piirtämiä ja siten ovat osa valmiina annettua ratkaisua. (Ylioppilastutkintolautakunta, 2018b.)

Alla olevien kuvioiden kaksi tilannetta ovat syntyneet erään abiturientin harjoitellessa dynaamisen matematiikkaohjelman käyttöä. Tehtävänä on auttaa häntä viemään tarkastelu loppuun molemmissa tapauksissa.

a) Mitä ympyrään liittyvää lausetta abiturientti tutkii kuvassa 1? Kirjoita lause mahdollisimman täsmällisiä termejä käyttämällä. (1 p.)

b) Abiturientti tarkastelee kuvassa 2 näkyvän kolmion merkillistä pistettä P. Mikä tämä piste on? Minkä pisteeseen P liittyvän geometrisen ominaisuuden abiturientti voi todentaa, jos hän piirtää ympyrän, jonka keskipisteenä on P ja jonka säde on sopivan mittainen? (1 p.)

c) Perustele **joko** a-kohdan lause, kun pisteet A, M ja C ovat samalla suoralla, **tai** b-kohdan ominaisuus. (4 p.)



Kuva 4. Syksyn 2018 pitkän matematiikan ylioppilaskokeen tehtävä 11. (Ylioppilastutkintolautakunta, 2018b)

Kevään 2019 kokeessa valmiina annetun ratkaisun arviointia löytyi tehtävästä 10, jonka nimi on ”Pohditaan sarjoja” (Kuva 5). Tehtävän ensimmäisessä osassa 10.1 on valmiina annettu opiskelijan tekemä sarjoihin liittyvä päättelyketju. Tehtävässä kysytään, mikä annetussa päättelyssä on mennyt väärin. (Ylioppilastutkintolautakunta, 2019a.)

10.1. Mikä seuraavassa päättelyssä on väärin?

$$\text{"Koska } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \text{ niin } \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = -1.\text{"}$$

Kuva 5. Kevään 2019 pitkän matematiikan ylioppilaskokeen tehtävän 10 ”Pohditaan sarjoja” osa 10.1. (Ylioppilastutkintolautakunta, 2019a)

Lyhyen matematiikan kokeissa on myös ollut valmiiden ratkaisujen arviointia. Syksyn 2019 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeessa valmiina annetun ratkaisun arviointia oli tehtävässä 4, jonka nimi on ”Numerotemppu” (Kuva 6). Tehtävässä on annettu ohjeet (a) - (g), joita noudattamalla vastaaja kertoo luvun. Numerotempun tietävä henkilö osaa päätellä tästä luvusta, milloin vastaaja on syntynyt ja minkä luvun vastaaja on valinnut numerotempun kohdassa (a). Opiskelijan täytyi tehtävässä selittää numerotempun idea matemaattisesti eli se, miksi numerotemppu toimii vain tietyn ikäisille vastaajille. (Ylioppilastutkintolautakunta, 2019c.)

Riikka on kehittänyt seuraavan numerotempun ja testaa sitä serkullaan Almalla. Alma on syntynyt 1.2.2000.
Riikka esittää Almalle seuraavat askeleet:

(a) Valitse luku väliltä $1-9$.
(b) Kerro valitsemasi luku luvulla 2.
(c) Lisää saamaasi lukuun 5.
(d) Kerro nyt saamasi luku luvulla 50.
(e) i) Jos olet jo viettänyt syntymäpäivääsi tänä vuonna, lisää lukuusi luku 1769.
ii) Jos et ole vielä viettänyt syntymäpäivääsi tänä vuonna, lisää lukuusi luku 1768.
(f) Vähennä nyt tuloksesta syntymävuotesi.
(g) Kerro, minkä tuloksen olet saanut.

Kun Alma vastaa 319, niin Riikka tietää kertoa, että Alma on 19-vuotias ja että hän valitsi alussa luvun 3.

Selitä matemaattisesti, miksi Riikan numerotemppu toimi Almalle, ja miksei se toimi Alman isoisoäidille, joka on yli 100-vuotias.

Kuva 6. Syksyn 2019 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeen tehtävä 4 ”Numerotemppu”. (Ylioppilastutkintolautakunta, 2019c)

Valmiina annetun ratkaisun arviointia sisältäviä tehtäviä lyhyessä matematiikassa oli myös syksyn 2017 ylioppilaskokeessa. Siinä kokeessa tehtävä 3 oli sama kuin saman koekerran pitkän oppimäärän matematiikan kokeen tehtävä 2, joka on esitelty aiemmin Kuvassa 2 (Ylioppilastutkintolautakunta, 2017d). Muissa lyhyen matematiikan kokeissa valmiina annettujen ratkaisujen arviointia ei ole ollut, kun taas pitkän matematiikan kokeissa sen tyyppisiä tehtäviä oli kaikissa muissa kokeissa samoina vuosina pois lukien syksyn 2019 ylioppilaskoe. (Yle, 2019a).

2.7 Sähköinen ja paperilla vastaaminen

Sähköiseen vastaamiseen liittyviä tutkimuksia on tehty enimmäkseen sellaisista kokeista, joissa ei ole tarvinnut kirjoittaa matemaattista tekstiä. Kun tehtävänannot ja vastausvaihtoehdot ovat ennalta määrättyjä ja suljettuja, kuten monivalintatehtävissä, niin tietokoneella ja paperilla tehtävät kokeet voidaan suunnitella ja toteuttaa lähes samankaltaisina (Noyes & Garland, 2008). Sen vuoksi tutkimuksen kohteena on ollut enimmäkseen monivalintatehtäviä sisältäviä testejä, koska niitä on ollut melko helppo muuntaa paperikokeista sähköisiksi kokeiksi. Siksi seuraavaksi tarkastellaankin yleisellä tasolla sitä, mitä onnistunut vastaaminen sähköisesti vaatii verrattuna perinteiseen kynällä ja paperilla vastaamiseen.

Tämän tutkimuksen kannalta on tärkeää miettiä millaisia eroja kynä-paperitekniikalla ja sähköisesti (tietokoneavusteisesti) vastaamisella on. Clarianan ja Wallacen (2002) mukaan kaksi suurinta eroa näiden kahden tavan välillä on se, kuinka vuorovaikutteinen vastausalusta on sekä alustan fyysinen koko; silmää miellyttävästi esitetty tiedon määrä tietokoneen näytöllä on vain kolmasosan siitä, mitä se standardikokoisella A4-paperilla olisi. Lisäksi tarvittavat taidot, joita tietokoneavusteinen ja kynä-paperitekniikalla vastaaminen vaativat, ovat erilaisia: sähköisessä ympäristössä täytyy olla enemmän vuorovaikutuksessa alustan kanssa, joka lisää opiskelijoiden keskittymistä tehtävään jokaisen tehtävän kohdalla. Vuorovaikutuksella sähköisessä ympäristössä tarkoitetaan sivun rullaamista, näppäilyä tai klikkaamista, jotta esimerkiksi annettu tehtävänanto saataisiin näkyville. Kynä-paperitekniikalla vastattaessa vuorovaikutus on vähäisempää, koska opiskelija voi tarkastella sivun kysymykset melko nopeasti ja voi käännellä koepapereita edestakaisin. (Clariana & Wallace, 2002.)

Bugbeen (1996) mukaan tietokoneella tehtävät testit ovat yleisesti ajateltu olevan myönteinen asia monelta kantilta: testausaika on lyhyempi, vastaaminen helpottuu, testi on turvallinen sekä pisteytys nopeutuu. On kuitenkin hyvä muistaa, että tutkimustuloksia on monenlaisia ja toisistaan eroavia hyötyjen kannalta. Esimerkiksi testitilanne ei ole oikea paikka testin tekijälle alkaa opetella tietokoneen käyttöä tai muita siihen liittyviä välineitä. Testin tuloksiin saattaa vaikuttaa alentavasti esimerkiksi se, miten testin tekijä kokee ahdistusta ja turhautuneisuutta tietokoneen takia. On testin valvojan vastuulla olla perillä siitä, miten toimia tilanteissa, joissa tietokoneen kanssa mahdollisesti esiintyy ongelmia. (Bugbee, 1996.)

Muutamia päätelmiä voidaan tehdä tietokoneella tehtävään testaukseen liittyen. Näitä ovat Bugbeen (1996) mukaan esimerkiksi se, että tietokone- ja kynä-paperiperustainen testaus voivat olla keskenään ekvivalentteja, mutta on testin kehittäjän vastuulla osoittaa se. Testien näyttäminen samalta ei tee niistä samanlaisia, koska näiden kahden vastaustekniikan välillä ei ole yhtenevyyttä luontaisesti. Tärkeää on myös testitulosten vertailun säilyvyys ja se, että tietokoneiden käyttäminen testaustilanteessa saattaa vaikuttaa testaukseen parantamalla tai huonontamalla testin tuloksia. Testaajan on hyvä omata vähintään perustuntemus tietokoneohjelmistoista, jotta sähköistä testiä voidaan tehokkaasti hyödyntää ja tulkita saatuja vastauksia. (Bugbee, 1996.) Vaikka kyseessä onkin jo parikymmentä vuotta vanha artikkeli, on sen päätelmät edelleen relevantteja nykypäivänä, kun suunnitellaan ja toteutetaan sähköistä koetta ja testaamista. Jo tuolloin Bugbee (1996) on ollut sitä mieltä, että maailman muuttuessa enemmän tietokonepainotteiseksi, niin samalla myös testaaminen muuttuu siihen suuntaan ja lähitulevaisuudessa tietokoneen käytön lisäämä testiahdistus vähenee sitä mukaan mitä enemmän käyttäjät kasvattavat tietämystään tietokoneista ja tottuvat niiden käyttöön.

Tutkimusten mukaan on huomattu eroja myös siinä, miten tehtävien tekoa ja ratkaisuja suunnitellaan. Åkerfeldtin (2014) mukaan opiskelijoilla, jotka käyttävät kynä-paperimenetelmää, on käytössään rajoitettu määrä vaihtoehtoja tekstin muokkaamiseen. Testitilanteissa tämä saattaa rajoittaa opiskelijoita, koska useimmiten he muotoilevat kokonaisia lauseita mielessään ennen kuin kirjoittavat ne ylös. Tämä voidaan huomata esimerkiksi siten, että opiskelijat ottavat toistuvasti pieniä taukoja ennen kirjoittamista ja he harvoin muokkaavat kirjoittamaansa tekstiä verrattuna sähköisessä ympäristössä työskenteleviin opiskelijoihin. Lisäksi sähköisessä ympäristössä kirjoittavien opiskelijoiden on huomattu käyttävän tietokoneen näyttöä ja näppäimistöä ajattelun työkaluna: usein opiskelijat aloittavat lauseiden kirjoittamisen, pyyhkivät sen pois ja aloittavat uudelleen. Tällaisissa tapauksissa näyttöä käytetään ajattelun ulkoistamisen alustana ja silloin näyttö ja näppäimistö ovat ajattelun järjestelyn apuvälineitä. (Åkerfeldt, 2014.)

Kansallinen koulutuksen arviointikeskus on julkaissut vuonna 2016 tutkimuksen ”Läksyt tekijäänsä neuvovat – Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten arviointi 9. vuosiluokalla 2015”. Tässä tutkimuksessa noin puolet vastanneista oppilaista suoritti joko päässälasku- tai monivalintatehtävät sähköisesti tietokoneella ja toinen puoli oppilaista suoritti tehtävät paperilla. Paperi- ja sähköversioilla saatuja vastauksia vertailtiin keskenään. Tutkimuksessa huomattiin, että monivalintatehtävissä paperiversion suorittaneet oppilaat menestyivät keskimäärin 2 prosenttiyksikköä paremmin verrattuna sähköisesti vastanneisiin oppilaisiin. Samoin päässälaskutehtävissä paperilla suorittaneet oppilaat menestyivät sähköversion suorittaneita keskimäärin 4 prosenttiyksikköä paremmin. Molemmissa tapauksissa ero oli tilastollisesti merkitsevä, mutta käytännössä kuitenkin varsin pieni. (Julin & Rautopuro, 2016.)

Sähköisen ja paperilla saatujen vastausten eroja oli tutkimuksessa selitetty sillä, että oppilaat eivät ole tottuneet vastaamaan matematiikan kokeissa sähköisesti ja se oli aiheuttanut oppilaille uusia haasteita esimerkiksi vastaamisen tarkkuuteen liittyen. Tärkeänä seikkana huomattiin se, että sähköisen vastaamisen ympäristön on oltava käytettävyydeltään hyvä. Huomioitavaa oli myös se, että pöytäkoneella tai kannettavalla tietokoneella tuotettujen sähköisten tehtävien ratkaisut olivat paljon paremmat kuin minikannettavalla tai tabletilla suoritetut tehtävät. (Julin & Rautopuro, 2016.)

Luku III

Tutkimuksen lähtökohdat

Tässä luvussa esitellään tutkimuksen tavoitteet ja tutkimuskysymykset. Tämän jälkeen käydään läpi tutkimuksen toteutus, jossa kerrotaan tarkemmin kokeen käytännön järjestelyistä sekä koetehtävien luonteesta ja sisällöistä. Lopuksi kerrotaan saadun tutkimusaineiston analysointimenetelmistä.

3.1 Tutkimuksen tavoitteet

Tarkoituksena on tutkia, minkälaisia eroja ja yhtäläisyyksiä ongelmanratkaisukeinoissa ja ratkaisujen perusteluissa on, kun samat tehtävät ratkaistaan kirjoittaen perinteisesti paperille ja sähköisesti tietokoneella. Tehtävät ovat tyypiltään sellaisia, että niissä on annettu tehtävänanto sekä tähän valmiiksi annettu ratkaisu. Opiskelija joutuu tämän pohjalta pohtimaan, onko annettu tehtävän valmis ratkaisu oikein vai väärin. Jos ratkaisu on opiskelijan mielestä jollain tavalla väärin, niin se täytyy korjata perustellen oikeaksi. Jos ratkaisu taas on opiskelijan mielestä valmiiksi oikein, riittää todeta vastauksen olevan oikein eikä tätä tarvitse perustella enempää.

Yksi tämän tutkimuksen tavoitteista on lisätä opiskelijoiden matemaattisia argumentointitaitoja, joiden lisääminen on myös yksi lukion opetussuunnitelman asettamista tavoitteista matematiikan osalta. Tähän liittyy esimerkiksi se, miten opiskelijat kykenevät sanallistamaan omia ratkaisujaan eli miksi he lähtevät korjaamaan tiettyjä osia valmiina annetuista ratkaisuista. Välineen vaihdolla kesken kokeen halutaan sitä, että jokainen opiskelija saa kokeilla molempia vastausmuotoja ja vastaaminen olisi siten tasapuolista kaikille opiskelijoille. Lisäksi tarkoituksena on tutkia sitä, missä määrin matematiikan tehtävien vastauksissa käytettävä tekniikka vaikuttaa vastausten tuottamiseen ja niiden sisältöihin. Tämän taustalla on se tosiasia, että opiskelu lukiossa on jo muuttunut viime vuosien aikana paperilla työskentelystä sähköiseen työskentelyyn tietokoneella. Kirjoitusten ollessa nyt kokonaan sähköiset, on se lisännyt myös lukion kurssien opiskelun pääpainon tietokoneella tehtäväksi.

Tutkimuskysymykset ovat seuraavat:

1. Miten hyvin opiskelijat kykenevät arvioimaan valmiina annettuja ratkaisuja?
2. Minkälaisia eroja opiskelijoiden ratkaisuissa on verrattaessa tietokoneella ja paperilla tehtyjä vastauksia?
3. Miten tietokoneella ja paperilla vastaaminen vaikuttaa opiskelijoiden ratkaisuihin?

3.2 Tutkimuksen toteutus

Tutkimus toteutettiin huhtikuun 2019 lopussa eräässä pohjoissavolaisessa lukiossa kurssin MAA5 - Analyyttinen geometria välikokeena. Kokeen tekoon oli varattu aikaa 75 minuuttia ja siihen osallistui yhteensä 22 lukion ensimmäisen vuoden opiskelijaa. Tutkimuksen kohteena olleessa ryhmässä opiskeli vastaajajoukkoa suurempi ryhmä, mutta kaikki eivät tulleet välikokeeseen paikalle erinäisistä syistä, mikä pienensi tutkimusjoukkoa. Tutkimuksen toteutuksessa olivat paikalla kokeeseen osallistuneet opiskelijat sekä heidän matematiikan opettajansa, joka valvoi koetilannetta. Opiskelijoille kerrottiin kokeen tehtävätyyppien normaalista poikkeavasta luonteesta juuri ennen koetta ja kehotettiin vielä erityisen huolellisesti lukemaan kokeessa olevat ohjeet. Kokeen järjestelyistä eli vastaamisalusta vaihdosta kahden tehtävän jälkeen oli kerrottu etukäteen opiskelijoille. Kurssin alkaessa opettaja oli myös kertonut tutkimuksesta, johon kurssin välikoe tulisi liittymään.

Tutkimusaineisto kerättiin Liitteessä A olevalla kokeella, jossa olevat tehtävänannot ja valmiina annetut ratkaisut suunniteltiin toteutuslukion matematiikan opettajan antamien toiveiden ja aiheiden pohjalta. Tehtävien suunnittelussa käytettiin apuna lukiossa käytössä olevaa oppikirjaa, josta voitiin katsoa esimerkkiä kokeen aiheita käsittelevistä tehtävistä. Tehtävien suunnittelun apuna käytettiin myös opettajan aiempina vuosina käyttämiä koetehtäviä. Näiden pohjalta voitiin suunnitella tehtävänannot sekä niihin valmiina annettavat ratkaisut. Koska kyseessä oli välikoe eikä kurssin loppukoe, oli tehtävien oltava tasoltaan perustehtäviä ja käsiteltävän tasaisesti välikoealuetta. Tähän välikokeeseen saatuja vastauksia käytettiin tutkimuksen aineistona.

Tehtäviä välikokeessa oli neljä kappaletta, jotka käsittelivät analyyttisen geometrian aiheita suoran kulmakerroin ja yhtälö, suorien yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus sekä pisteen etäisyys suorasta. Jokaisessa valmiina annetussa ratkaisussa oli jokin virhe tai virheitä liittyen tehtävän aiheisiin, jotka opiskelijoiden täytyi perustellen korjata. Valmiina annettujen ratkaisujen arviointi vie enemmän aikaa kuin pelkän tehtävänannon lukeminen jo pelkästään sen takia, että luettavaa tekstiä on enemmän kuin yhteen tehtävänantoon verrattuna. Tehtävien luonteen sekä koeajan rajallisuuden vuoksi tehtävänannot täytyi suunnitella siten, että ne ovat kuitenkin selkeitä eikä niiden lukemiseen ja ymmärtämiseen mene liian kauan aikaa. Yksi kokeen suorittamista nopeuttanut tekijä oli se, että yksikään valmiina annettu ratkaisu ei ollut täysin väärin ratkaistu, vaan osa ratkaisusta oli jo osittain oikein. Kokeesta ei kuitenkaan ollut mahdollista saada hyvää arvosanaa vain toteamalla kaiken olevan oikein.

Tehtävien asettelu kokeessa oli sellainen, että ensin oli annettu tehtävänanto ja tämän alapuolella oli tehtävään liittyvä ratkaisuyritys eli valmiina annettu ratkaisu. Paperisessa versiossa valmiina annetun ratkaisun alapuolelle oli jätetty tyhjää tilaa, johon opiskelija pystyi omaa ratkaisuaan kirjoittamaan, mutta paperilla oli mahdollista perustella myös muualle paperissa olleeseen tyhjään tilaan. Sähköisessä versiossa valmiina annetun ratkaisun alapuolelle oli jätetty tyhjä tekstikenttä oman ratkaisun perustelemista varten. Sähköisen vastaamisen ympäristönä käytettiin yleisesti lukio-opinnoissa tällä hetkellä käytössä olevaa Abitti-koejärjestelmää, jota opiskelijat olivat jo käyttäneet aiemmissa kurssikokeissa vastausalustana. Sähköisesti tietokoneella vastaamalla ei ollut mahdollista vastata muualle kuin vastaukselle varattuun tekstikenttään. Esimerkiksi annetun tehtävänannon ja valmiina annetun ratkaisun kopioiminen ja liittäminen tekstikenttään oli mahdollista.

Tutkimus toteutettiin paperisena ja sähköisenä versiona siten, että jokainen opiskelija vastasi kahteen kokeen tehtävään paperilla ja kahteen tehtävään sähköisesti. Opiskelijat oli jaettu sattumanvaraisesti kahteen ryhmään, joista ensimmäinen ryhmä vastasi tehtäviin yksi ja kaksi tietokoneella ja tehtäviin kolme ja neljä paperilla. Toinen ryhmä vastasi ensin tehtäviin yksi ja kaksi paperilla ja tehtäviin kolme ja neljä sähköisesti tietokoneella. Niin paperinen kuin sähköinen vastaaminen toteutettiin samassa tilassa koejärjestelyiden ja kokeen valvonnan helpottamiseksi. Yksi opiskelija vastasi jokaiseen neljään tehtävään paperilla, mutta myös hänen ratkaisunsa otettiin huomioon vastauksia analysoitaessa. Tämä vaikutti vastaajaryhmien kokoon siten, että Tehtäviin 1 ja 2 saatiin molempiin 10 ratkaisua tietokoneella tehtynä ja 12 ratkaisua paperille vastattuna. Tehtäviin 3 ja 4 ratkaisuja saatiin molemmilla vastaustavoilla 11 kappaletta molempiin tehtäviin.

Tutkimukseen osallistuminen oli vapaaehtoista eikä tutkimusluvan antamatta jättäminen vaikuttanut kurssin arviointiin eikä sen suorittamiseen millään tavalla. Kaikkien opiskelijoiden tekemät tehtäväratkaisut annettiin eteenpäin tutkimuskäyttöön siten, että vastauksista oli poistettu kaikki tunnistettavat henkilötiedot, kuten opiskelijan nimi. Opiskelijoiden tekemät ratkaisut oli myös jaoteltu tehtävittäin, joten ei ollut mahdollista tietää, mitkä vastaukset Tehtäviin 1 - 4 ovat saman opiskelijan tekemiä. Tutkimuksesta ja siihen osallistumisesta kerrottiin opiskelijoille vielä suullisesti ennen koetta sekä kirjallisesti kokeen vastausalustalla ennen varsinaisia koetehtäviä. Lupaa opiskelijoiden ratkaisujen luovuttamisesta tutkimuskäyttöön kysyttiin kirjallisena Liitteessä B olevalla lomakkeella, joka oli sijoitettu vastausalustalle koetehtävien yläpuolelle. Välikokeen tehtävien oikeat ratkaisut löytyvät Liitteestä C.

3.3 Koetehtävät ja niiden valmiit ratkaisut

Liitteestä A löytyvissä koetehtävissä ensimmäisen tehtävän aiheena oli suoran kulmakerroin, jonka a-kohdassa täytyi määrittää kulmakerroin annettujen pisteiden avulla ja b-kohdassa täytyi kertoa, minkälainen tämä suora on. Annetussa ratkaisuyrityksessä kulmakerroin on laskettu väärin, koska x- ja y-koordinaattien paikat kaavaan sijoittaessa ovat menneet sekaisin ja siten saatu väärä vastaus. Perustelu suoran ulkonäöstä on tehty kuitenkin oikein, koska suora on laskeva kulmakertoimen ollessa jokin negatiivinen luku. Tehtävän saa ratkaistua oikein, kun korjaa kaavansijoituksen oikein ja huomaa samalla tehtävän b-kohdan olevan oikein väärästä alkuperäisestä vastauksesta huolimatta.

Toinen tehtävä käsitteli suoran yhtälöä. Tehtävässä täytyi määritellä vakion arvo siten, että piste, jonka koordinaatit sisältävät myös annetun vakion, olisi samalla suoralla myös kahden muun valmiiksi annetun pisteen kanssa. Ratkaisuyrityksessä on kuvakaappaus GeoGebralla tehdystä piirroksesta, jonka avulla on perusteltu yksi mahdollinen vakion arvo, jolla halutut ehdot toteutuvat. Tämä valmiina annettu ratkaisu on oikein. Kuitenkin tämä on vasta puolet ratkaisusta, koska on olemassa myös toinen vakion arvo, jolla kaikki kolme pistettä saadaan kulkemaan samalla suoralla. Tämän kohdan perustelu annetusta ratkaisuyrityksestä puuttui ja tämän huomaamalla ja sen lisäämällä tehtävän saa ratkaistua kokonaan oikein.

Tehtävässä 3 oli annettu seitsemän eri suoran yhtälöä, joiden avulla täytyi selvittää, mitkä näistä suorista ovat toisiaan vasten kohtisuorassa ja mitkä ovat keskenään yhdensuuntaisia. Ratkaisuyrityksessä oli lähdetty selvittämään jokaisen annetun suoran kulmakerrointa. Lisäksi oli kerrottu, että suorien ollessa yhdensuuntaiset, niiden kulmakertoimet ovat yhtä suuret ja suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vasten, kun niiden kulmakertoimien tulo on -1. Tässä ratkaisussa oli kuitenkin epäonnistuttu muutamien suorien kulmakertoimien laskemisessa ja sen myötä saaduista vastauksista ei ole osattu päätellä kaikkia yhdensuuntaisuuksia ja kohtisuoruuksia kyseessä olleiden suorien välille. Siten annettu ratkaisuyritys on osittain puutteellinen. Korjaamalla suorien kulmakertoimet oikein huomataan, että vastauksesta puuttuu kaksi suorien välistä yhdensuuntaisuutta sekä yksi kohtisuoruus ja nämä lisäämällä ratkaisuun saadaan tehtävä ratkaistua oikein.

Neljännessä tehtävässä täytyi tutkia, onko annetun pisteen etäisyys annetusta suorasta riippuvainen vakiosta t, joka esiintyy niin kyseisen pisteen koordinaateissa kuin myös suoran yhtälössä. Ratkaisuyrityksessä oli käytetty oikeaa kaavaa, mutta sijoittaessa arvoja kaavaan ja laskemalla tätä eteenpäin on saatu lopputulos, jossa vakio t ei supistu pois. Lisäksi kaavaan sijoituksessa nimittäjässä olevasta lausekkeesta supistetaan neliöjuuret ja neliöt pois väärällä tavalla, mikä vaikuttaa myös lopputulokseen. Tehtävän oikea ratkaisu olisi ollut sellainen, jossa vakio t on saatu supistettua lausekkeesta ja tämän kautta olisi todettu, ettei pisteen etäisyys suorasta riipu kyseessä olevasta vakiosta t.

3.4 Aineiston analysointimenetelmät

Aineistoa analysoitiin luokittelemalla saadut vastaukset ensin vastauksen sisältävien oikein olevien perustelujen mukaan. Näitä vastauksia verrattiin tehtävien oikeisiin ratkaisuihin (Liite C) ja katsottiin sen mukaan, onko opiskelijan tekemä ratkaisu täysin vai osittain oikein perusteltu vai perusteltu täysin väärin. Tällä tavoin opiskelijoiden tekemät ratkaisut jaettiin näihin kolmeen eri luokkaan, joiden jaotteluperusteet on lueteltu alla:

1. Täysin oikein perusteltuun ratkaisuun vaadittiin, että jokainen valmiina annetussa ratkaisussa ollut virhe oli löydetty ja korjattu perustellen oikein.
2. Osittain oikein perusteltuun ratkaisuun vaadittiin, että opiskelija oli löytänyt kaikki tai osan valmiina annetussa ratkaisussa olleista virheistä, mutta kaikkia löydettyjä virheitä ei ollut korjattu oikein.
3. Väärin perusteltu vastaus oli sellainen, että valmiina annetulle ratkaisulle ei ollut tehty mitään tai osa virheistä oli huomattu, mutta ne oli perusteltu väärin tai oli alettu korjaamaan jo oikein olleita kohtia valmiista ratkaisusta.

Vastausluokkansa perusteella opiskelijan tekemä ratkaisu voitiin pisteyttää niin, että täysin oikein perustellusta ratkaisusta sai kaksi pistettä, osittain oikein perustellusta ratkaisusta yhden pisteen ja väärin perustellusta ratkaisusta ei saanut lainkaan pisteitä. Tehtävän 1 b-kohta pisteytettiin niin, että oikeasta perustelusta sai yhden pisteen ja osittain oikein tai väärästä perustelusta ei saanut pistettä ollenkaan. Tämä johtui siitä, että kyseinen b-kohta oli jo valmiina annetussa ratkaisussa perusteltu oikein. Tehtävän 1 maksimipistemäärä oli siten sen a- ja b-kohtien vuoksi 3 pistettä ja muiden tehtävien maksimipistemäärä oli 2 pistettä. Tätä pisteytystapaa käytettiin ainoastaan aineiston analysoinnin apuna eikä kurssin opettaja pisteyttänyt ja antanut arvosanaa välikokeesta tällä periaatteella.

Pisteytyksen avulla voitiin katsoa vastaajaryhmien A ja B kokonaismenestystä tehtävissä verraten vastaajaryhmän saavuttamaa yhteispistemäärää tehtävän kokonaispistemäärään. Tämä kokonaispistemäärä on se pistemäärä, jonka vastaajaryhmä olisi saanut, jos jokainen opiskelija olisi perustellut ratkaisunsa täysin oikein kyseiseen tehtävään. Tämä kokonaispistemäärä siis riippui siitä, kuinka monta opiskelijaa vastasi kyseisellä vastausmuodolla tehtävään ja tämä määrä kerrottiin tehtävän maksimipistemäärällä. Esimerkiksi Tehtävään 1 vastasi tietokoneella 10 opiskelijaa, niin tällöin kokonaispistemäärä tähän tehtävään tällä vastausmuodolla oli 30 pistettä, koska maksimipistemäärä Tehtävästä 1 oli 3 pistettä. Tämän jälkeen katsottiin vastaajaryhmän opiskelijoiden menestystä laskemalla heidän pisteensä yhteen ja jaettiin tämä pistemäärä tehtävän kokonaispistemäärällä. Näin saatiin jokaiseen tehtävään keskiarvo siitä, miten hyvin vastaajaryhmä menestyi kyseisessä tehtävässä. Tämän jälkeen laskettiin vielä tehtäväkohtaiset keskihajonnat, jonka avulla nähtiin, kuinka paljon eroa vastaajaryhmän sisällä ratkaisuissa oli jokaista tehtävää kohden.

Opiskelijoiden tekemien ratkaisujen merkit laskettiin ja niiden avulla voitiin laskea vastauksien merkkipituudet. Tätä kautta saatiin ratkaisujen pituuksien keskiarvot sekä mediaanit. Välilyöntejä ei laskettu yhdeksi merkiksi eikä myöskään jakolaskussa käytettävää jakoviivaa. Yksittäiset tavuviivat, joita oli pelkästään paperilla tehdyissä vastauksissa, jätettiin myös laskematta merkkimäärään. Kaikki muut merkit, niin tavallisessa tekstissä esiintyvät kuin matemaattiset, laskettiin vastauksen merkkipituuteen mukaan. Tällä tavoin laskettuja merkkipituuksia pystyttiin vertaamaan keskenään vastausmuotojen välillä niin tehtäväkohtaisesti kuin lopulta yleisesti.

Opiskelijoiden ratkaisuista laskettiin myös niiden sisältämät lauseet. Tässä tutkimuksessa lauseet laskettiin vastauksista siten, että lauseen katsottiin alkavan isosta alkukirjaimesta ja päättyvän pisteeseen. Jos pisteitä tai isoja alkukirjaimia ei ollut käytetty, niin vastauksen asettelusta pääteltiin lauseen alku- ja loppu sen sisältävien sanojen ja ilmausten perusteella. Tällä tavoin laskettujen lauseiden sisältämät sanat voitiin myös laskea. Esimerkiksi jos opiskelijan tekemä ratkaisu oli pelkkä toteamus ”Oikein”, niin tämä tarkoitti laskennallisesti yhtä lausetta, jossa on yksi sana. Matemaattinen, yhtenäinen laskulauseke laskettiin yhdeksi lauseeksi, jotta nämä saatiin myös huomioitua mukaan lausepituuteen. Matemaattisen lausekkeen termit, joiden ympärillä on jokin laskutoimituksen merkki tai yhtäsuuruus, rinnastettiin vastaamaan tavallisessa tekstissä olevaa sanaa, jotta ne voitiin laskea lauseiden sisältämien sanojen määrään mukaan.

Opiskelijoiden tekemistä ratkaisuista analysoitiin myös sisältöä ja merkintöjä eli millä tavoin he olivat lähteneet havaitsemiaan virheitä perustelemaan ja miten he ovat päätyneet loppuratkaisuunsa. Yleisesti ottaen tehtävänannossa ollutta oikeaa valmiina annettua ratkaisuyritystä ei tarvinnut lähteä perustelemaan. Tässä katsottiin muun muassa sanallisten selitysten ja matemaattisten laskujen määrää ja niiden suhdetta vastauksen kokonaispituuteen. Sanallisten selitysten kohdalta katsottiin sitä, miten laajoja ja millaisia sisältöjä niihin oli kirjoitettu ja miten oikein sanalliset perustelut olivat. Vastauksen perusteluja olivat myös tarkoituksenmukaiset laskutoimitukset, mutta myös näitä laskutoimituksia tukevat sanalliset selitykset, jotka veivät tehtävän ratkaisua jollain tapaa eteenpäin kohti loppuratkaisua. Näitä perusteluja valmiina annettuihin ratkaisuihin ja perustelujen sisältöjä pystyttiin vertailemaan keskenään niiden yhteneväisyyksien ja eroavaisuuksien perusteella.

Luku IV

Tulokset

Tässä luvussa käydään läpi sitä, miten opiskelijat ovat valmiina annettuja ratkaisuja arvioineet jokaisen neljän tehtävän kohdalla eritellen vastausmuodon mukaan. Analysoinnin avuksi on tehty taulukoita, joihin on eritelty ratkaisujen yhteenvetoa käytettyjen vastausmuotojen mukaan. Jokaisen tehtävän kohdalla käsitellään ensin omassa alaluvussaan tietokoneella tehdyt ratkaisut, jonka jälkeen käsitellään samaan tehtävään tulleet paperilla tehdyt ratkaisut omassa alaluvussa. Lopuksi vielä käsitellään opiskelijoiden kokonaismenestystä kokeessa ryhmittäin sekä yleisesti sekä opiskelijoiden osaamiseroja näiden ryhmien A ja B sisällä.

4.1 Tehtävä 1: Suoran kulmakerroin

Taulukkoon 1 on koottu yhteenvetoa Tehtävän 1 a- ja b- kohtiin saaduista vastauksista. Yhteensä tähän tehtävään vastasi 22 opiskelijaa, joista 10 opiskelijaa teki vastauksensa tietokoneella ja 12 opiskelijaa paperilla. Vertailtaessa keskenään Tehtävään 1 saatuja vastauksia tietokoneella ja paperille tehtyjen vastausten välillä, huomataan, että tietokoneella tehdyt vastaukset ovat merkkikeskiarvoltaan pidempiä kuin paperilla tehdyt vastaukset. Myös pituuden mediaani, eli vastauksen tyypillisin merkkipituus kaikista vastauksista, oli tietokoneella vastattaessa suurempi kuin paperille tehdyissä vastaukset. Tarkastellessa vastausten sisältävien lauseiden määrää sekä näissä lauseissa olevia sanoja, on tietokoneella tehdyissä ratkaisuissa keskimäärin hieman enemmän lauseita ja sanoja kuin paperille tehdyissä vastauksissa. Tietokoneella tehdyissä vastauksissa lauseiden määrä oli keskimäärin hieman yli kolmen ja näissä lauseissa oli yhteensä 19 sanaa kun taas paperille vastattuna lauseita oli keskimäärin hieman vajaa kolme ja näissä lauseissa yhteensä 13 sanaa. Vastausten sisältämien lauseiden ja niissä olevien sanojen määrän vertailussa ei eroteltu tehtävän a- ja b- kohtaa, koska b-kohta oli itsessään hyvin lyhyesti perusteltavissa, jonka vuoksi ne katsottiin yhtenä tehtäväkokonaisuutena ilman erittelyä.

Taulukko 1: Tehtävään 1 saatujen vastausten yhteenveto.

Vastausmuoto	Perusteltu täysin oikein	Perusteltu osittain oikein	Perusteltu väärin	Vastausten pituuden keskiarvo (merkkiä)	Vastausten pituuden mediaani (merkkiä)	Vastausten lauseet ja sanat (keskiarvot)
Tietokone (10)						3,1 ja 19
a)	6 (60 %)	2 (20 %)	2 (20 %)	74	61	
b)	7 (70 %)	1 (10 %)	2 (20 %)	35	30	
Paperi (12)						2,8 ja 13
a)	7 (58 %)	3 (25 %)	2 (17 %)	52	28	
b)	8 (67 %)	2 (17 %)	2 (17 %)	22	6	
Yhteensä (22)						2,9 ja 16
a)	13 (59 %)	5 (23 %)	4 (18 %)	62	28	
b)	15 (68 %)	3 (14 %)	4 (18 %)	28	11	

Taulukon 1 perusteella vaikuttaisi siltä, että täysin oikein tehtyjä ratkaisuja kokeen Tehtävään 1 tuli enemmän tietokoneella tehtynä kuin paperilla tehtynä niin a- kuin b-kohdissa. Jos tarkasteluun otetaan oikein perusteltujen ratkaisujen lisäksi osittain oikein perustellut ratkaisut, niin vaikuttaisi siltä, ettei eroa vastaustavan välillä ole. Oikein ja osittain oikein perusteltuja ratkaisuja paperille olivat tehneet kaikki kymmenen opiskelijaa eli 80 % kaikista vastaajista. Tietokoneella oikein tai osittain oikein perusteltuja ratkaisuja oli tehnyt kahdeksan eli 80 % vastaajista.

4.1.1 Tietokoneella ratkaistuna

Tehtävässä 1 tietokoneella vastanneista opiskelijoista kahdeksan eli 80 % vastaajista huomasi virheen tehtävän a-kohdassa, jossa oli annettu ratkaisuyritys kulmakertoimen laskemiseksi. Näistä kuusi opiskelijaa eli 60 % vastaajista oli perustellut ratkaisunsa täysin oikein ja kaksi opiskelijaa eli 20 % vastaajista perusteli osittain oikein. Kaksi opiskelijaa eli 20 % vastaajista oli perustellut tehtävän täysin väärin väittämällä, että tehtävä on jo laskettu valmiiksi oikein viittaamatta siihen, tarkoittaako sillä a- vai b-kohtaa. Sen vuoksi ratkaisut jaoteltiin väärin perustelluiksi.

Valmiina annetussa ratkaisussa kulmakertoimen kaavaan oli sijoitettu vääriin kohtiin x- ja y-koordinaattien arvot, jonka takia lasku oli virheellinen. Tätä oli sanallisesti kommentoitu yleisimmin sanomalla, että *”sijoitettu väärin päin”* ja tämän jälkeen oli tehty kaavaan sijoitus, jossa koordinaatit ovat sijoitettu omille paikoilleen. Yhden opiskelijan oikein perusteltu ratkaisu tehtävään on tehty seuraavalla tavalla:

> *Vastaus on väärin, koska kulmakertoimen kaava on* $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. *Laskussa x-koordinaatin muutos jaetaan y-koordinaatin muutoksella, mutta kaavasta näkyy, että y-koordinaatin muutos pitäisi jakaa x-koordinaatin muutoksella, jotta lasku menisi oikein.*

Erään toisen opiskelijan ratkaisussa on myös sanottu, että *”kaavassa y-koordinaattien tulisi olla yläpuolella ja x-koordinaattien alapuolella”* ja tämän jälkeen laskettu kulmakerroin kahdella eri tavalla ja saatu sama ratkaisu molemmista. Näin ollen opiskelija on vakuuttunut ratkaisun olevan oikea, koska on kahdella eri laskutavalla päätynyt samaan ratkaisuun.

Kaksi opiskelijaa oli huomannut, että tehtävän a-kohdassa kulmakerroin on laskettu väärin, mutta perustellessa tätä he olivat saaneet väärän vastauksen. Oikean vastauksen ollessa -2, oli toinen opiskelija saanut vastaukseksi 12 ja toinen -10. Samaisen tehtävän b-kohdassa kysyttiin, minkälainen suora on kyseessä. Kulmakertoimeksi -10 saanut opiskelija oli vastannut, että *”kohta on oikein eli suora on laskeva, koska suoran kulmakerroin on negatiivinen”* ja kulmakertoimeksi 12 saanut opiskelija oli perustellut ratkaisuaan sanoin *”väärin koska kulmakerroin on positiivinen, joten se on nouseva* *suora".* Molemmat perustelut ovat sisällöltään aivan oikein, jos katsotaan vain siltä kannalta, minkä kulmakertoimen he ovat saaneet laskettua. Tehtävän kannalta katsottuna negatiivisen arvon saanut opiskelija on enemmän oikeassa kuin positiivisen kulmakertoimen arvon saanut.

4.1.2 Paperilla ratkaistuna

Samaisen tehtävän paperilla ratkaisseista kaikki kymmenen opiskelijaa huomasivat a-kohdassa olleen virheen. Kuitenkaan kaikki opiskelijat eivät osanneet laskea kulmakerrointa perusteluihinsa oikein, vaan kolme opiskelijaa oli laskenut kulmakertoimen väärin. Kaksi näistä väärin ratkaisseista opiskelijoista oli saanut laskettua kulmakertoimen positiiviseksi, joten samalla heidän perustelunsa tehtävän b-kohtaan on myös mennyt väärin. Tehtävän a-kohdan oli perustellut täysin oikein seitsemän opiskelijaa eli 58 % vastaajista ja osittain oikein a-kohdan oli perustellut kolme opiskelijaa eli 30 % vastaajista. Samaisen Tehtävän b-kohdan oli perustellut oikein kahdeksan opiskelijaa, joka on 67 % vastaajista, kun taas osittain oikein sen oli perustellut kaksi opiskelijaa eli 17 % vastaajista. Kaksi opiskelijaa eli 17 % vastaajista oli perustellut tehtävän olevan kokonaan oikein jaottelematta tähän a- tai b-kohtia millään tavalla, jonka vuoksi nämä vastaukset jaoteltiin väärin perustelluiksi ratkaisuiksi.

Eräs osittain oikein perustellut opiskelija osasi lähteä perustelemaan annetun ratkaisuyrityksen sisältämää virhettä oikein: *"Suoran kulmakerroin lasketaan kaavalla* $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$*, joten vastaus on:* $\frac{4-(-6)}{-3-2} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3}$ *".* Opiskelija on siis osannut perustella kaavan, johon kulmakertoimen laskeminen perustuu, mutta laskuvirheen vuoksi hän ei ole saanut oikeaa vastausta. Kuitenkin ratkaisun ollessa negatiivinen, hän on osannut b-kohtaan sanoa, että silloin suora on laskeva ja b-kohta on siten valmiiksi oikein.

Myös toinen osittain oikein perustellut opiskelija lähtee perustelemaan oikealla tavalla tehtävää: *"Kulmakerroin on väärin, koska* $x_2 - x_1$ *on jaettu* $y_2 - y_1$*, jonka pitäisi olla väärin."* Perustelua on jatkettu kulmakertoimen laskemisella, mutta kaavaan sijoituksessa tapahtuu jälleen virhe, jonka vuoksi hänen saama kulmakertoimen arvo on positiivinen. Tämän vuoksi hän perustelee b-kohdassa suoran olevan nouseva.

Oikein perustellut ratkaisut ovat melko samanlaisia keskenään. Nämä lähtevät yleensä siitä, että todetaan kulmakertoimen laskukaava jollain tavalla, jonka jälkeen tähän tehdään arvojen sijoitus, lasketaan se ja päätellään sen kautta myös b-kohdan olevan oikein. Yksi täysin oikein perustellut opiskelija vastasi tehtävään tällä tavoin:

”Kohta a) on väärin, koska kaava, jolla kulmakerroin ratkaistaan on $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ näin ollen suoran kulmakerroin on: $k = \frac{4+6}{-3-2} = \frac{10}{-5} = -2$
Kohta b) on oikein ”

Toinen opiskelija perusteli saman tehtävän täysin oikein hieman eri sanavalinnoilla kuin edellinen opiskelija:

”a) Kulmakerroin ratkaistaan kaavalla $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *ja ratkaisumallissa x:n arvot ovat ylhäällä ja y:n arvot alhaalla, joten ratkaisumalli on väärin. Oikea ratkaisumalli:* $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-6)}{-3-2} = \frac{10}{-2} = -2$
b) Oikein.”

4.2 Tehtävä 2: Suoran yhtälö

Tehtävään 2 olivat kaikki 22 opiskelijaa vastausmuodosta riippumatta vastanneet, että annettu ratkaisuyritys on oikein, eivätkä olleet tehneet sille mitään. Sinänsä tehtävään annettu valmis ratkaisu on oikein, koska se kattaa yhden mahdollisen vakion arvon, jolla suoran yhtälö toteutuu. On kuitenkin olemassa myös toinen vakion arvo, jolla suoran yhtälö myös toteutuu. Siten tästä tehtävästä ei voi sanoa sen enempää, oliko kummalla vastausmuodoilla tuotetut ratkaisut parempia. Myöskään ratkaisun arvioinnin onnistuvuutta ei sen enempää vastauksista pystytä sanomaan, koska jokainen opiskelija oli ilmoittanut ratkaisun vastaukseksi lyhyimmillään *”Oikein”* tai pisimmillään *”Tehtävä on ratkaistu oikein.”* Siten myöskään vastauksien pituuksien keskiarvojen ja mediaanien vertaaminen keskenään ei ole mielekästä eikä tähän tehtävään saatuja ratkaisuja käsitellä tämän enempää tässä tutkimuksessa.

4.3 Tehtävä 3: Yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus

Taulukossa 2 on kuvattu Tehtävään 3 saatujen vastausten yhteenvetoa vastausmuodon mukaan. Yhteensä tähän tehtävään saatiin 22 vastausta, joista 11 oli tehty tietokoneella ja samoin 11 paperilla. Vertailtaessa vastausmuodon mukaan Tehtävään 3 tulleita ratkaisuja, voidaan huomata, että ratkaisujen mediaanipituus molemmilla vastaustavoilla on kuusi merkkiä. Tämä selittyy sillä, että niin moni opiskelijoista vastasi ratkaisuyrityksen olevan oikein, eikä jatkanut tehtävän ratkaisemista sen pidemmälle. Keskiarvoltaan tietokoneella tehdyt vastaukset ovat pituudeltaan 48 % pidemmät eli lähes kaksinkertaiset verrattuna paperilla tehtyihin vastauksiin. Vertailtaessa vastausten sisältäneitä lauseita ja näissä lauseissa olevien sanojen määrää, huomataan, että tietokoneella vastattuna lauseita ja näissä olevia sanoja on enemmän kuin paperilla vastattuna. Tietokoneella tehdyssä ratkaisussa oli keskimäärin 2,6 lausetta ja näissä yhteensä 20 sanaa kun taas paperilla vastattuna lauseita oli keskimäärin 1,9 ja näissä lauseissa yhteensä 10 sanaa.

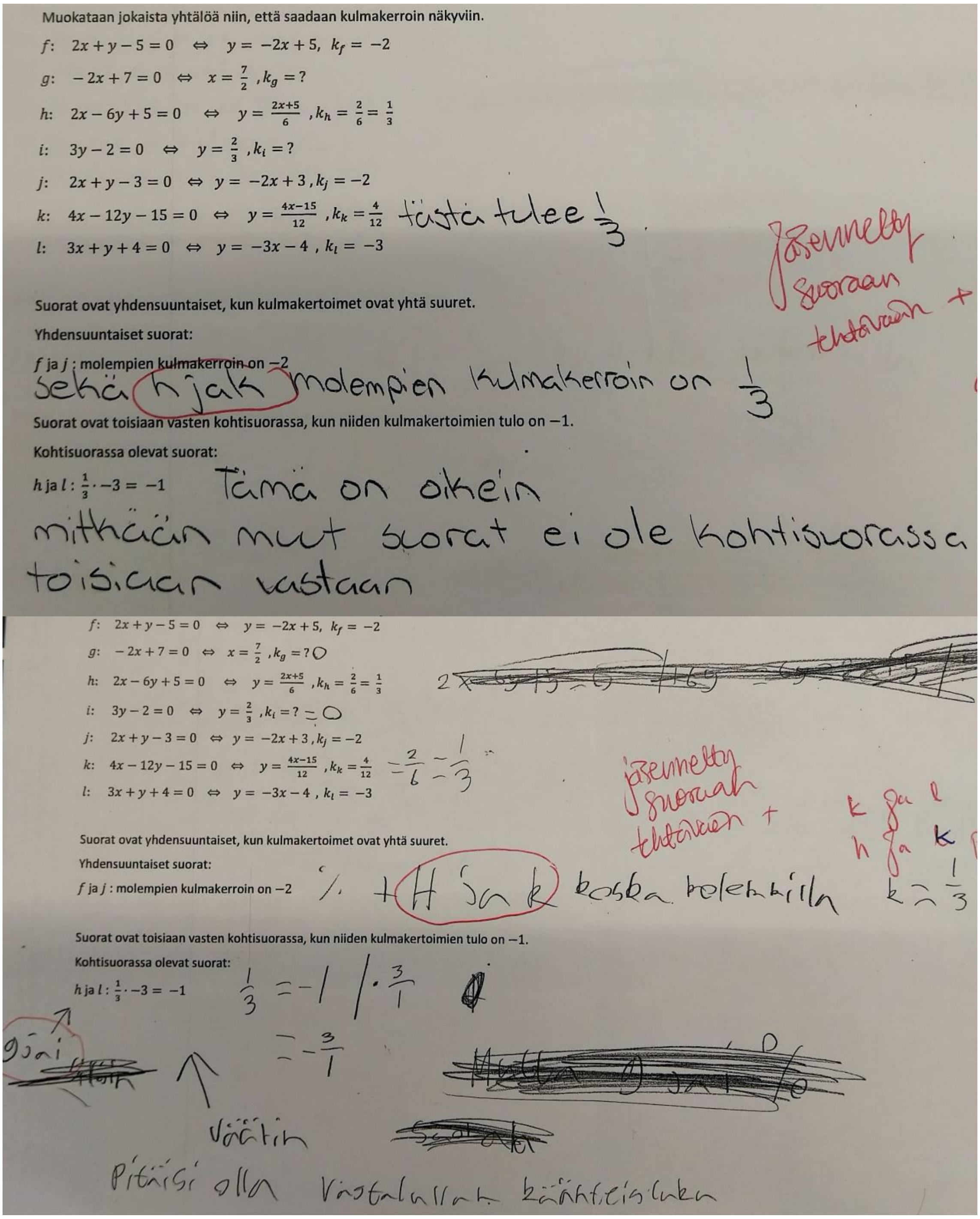
Taulukko 2: Tehtävään 3 saatujen vastausten yhteenveto.

Vastausmuoto	Perusteltu täysin oikein	Perusteltu osittain oikein	Perusteltu väärin	Vastausten pituuden keskiarvo (merkkiä)	Vastausten pituuden mediaani (merkkiä)	Vastausten lauseet ja sanat (keskiarvot)
Tietokone (11)	0	5 (45 %)	6 (55 %)	98	6	2,6 ja 20
Paperi (11)	0	4 (36 %)	7 (64 %)	53	6	1,9 ja 10
Yhteensä (22)	0	9 (41 %)	13 (59 %)	76	6	2,3 ja 15

Tehtävään 3 tulleista ratkaisuista yksikään ei ollut perusteltu täysin oikein kummallakaan vastausmuodolla tehtynä Taulukon 2 perusteella. Osittain oikein perusteltuja ratkaisuja saatiin tietokoneella yhden vastauksen verran enemmän verrattuna paperilla vastanneisiin. Tietokoneella vastanneista 45 % perusteli ratkaisunsa osittain oikein ja paperilla vastauksensa perusteli osittain oikein 36 % vastaajista. Nämä molemmat vastaustavat huomioiden osittain oikein perustellut ratkaisut kattoivat 41 % kaikista ratkaisuista. Loput tehdyistä ratkaisuista olivat perusteltu kokonaan väärin.

On huomion arvoista, että Tehtävään 3 tuli eri tavalla jäsenneltyjä vastauksia paperille vastattaessa kuin vastaavasti tietokoneella vastattuna. Valmiina annettu ratkaisu oli kirjoitettu tehtävänantoon niin, että siinä olevien tekstirivien väleihin oli mahdollista kirjoittaa. Tätä mahdollisuutta oli itse asiassa jokainen paperilla vastausta korjaamaan lähtenyt opiskelija käyttänyt hyväkseen. Tehtävänannossa olevat suorat oli annettu luettelomaisesti, jolloin tällainen tehtävään suoraan merkitseminen oli mahdollista. Sen jälkeen valmiina annetussa ratkaisussa oli ensin käsitelty yhdensuuntaiset suorat, jonka jälkeen käsiteltiin toisiaan vasten kohtisuorassa olevat suorat. Näiden suorien ominaisuuksia käsittelevien kohtien väliin oli jätetty tilaa, johon jokainen opiskelija oli omia korjauksiaan paperilla vastatessaan tehnyt. Muiden tehtävien ratkaisujen kohdalla ei näin selkeää eroa vastausmuotojen välillä ulkonäöllisesti ollut, vaan ne olivat melko samankaltaisia lukuun ottamatta sitä seikkaa, että paperilla vastanneet olivat tehneet pieniä merkintöjä valmiina annettuihin ratkaisuihin.

Kuvassa 7 on kaksi paperille tehtyä vastausta esimerkkinä siitä, miten tehtävänantoa ja valmiina annettua ratkaisua hyödynnettiin Tehtävään 3 tehdyissä ratkaisuissa. Molemmissa esimerkkiratkaisuissa annettujen suorien yhtälöiden kulmakertoimien laskemiseen liittyneitä havaittuja virheitä oli korjattu merkitsemällä ne heti yhtälöiden perään. Seuraavaksi yhdensuuntaisten suorien tiedon jälkeen tyhjään tilaan oli lisätty oma ratkaisu, jos siitä opiskelijan mielestä puuttui perustelut muista yhdensuuntaisista suorista. Tämän jälkeen valmiina annetussa ratkaisussa oli annettu tieto kohtisuorista suorista ja myös tämän jälkeen oli mahdollista kirjoittaa tyhjään tilaan omaa ratkaisuaan. Molemmissa Kuvassa 7 olevissa ratkaisuissa hyödynnettiin näitä paperille tyhjäksi jätettyjä kohtia.



Muokataan jokaista yhtälöä niin, että saadaan kulmakerroin näkyviin.

f: $2x + y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 5,\ k_f = -2$

g: $-2x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2},\ k_g = ?$

h: $2x - 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2x+5}{6},\ k_h = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

i: $3y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3},\ k_i = ?$

j: $2x + y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 3,\ k_j = -2$

k: $4x - 12y - 15 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4x-15}{12},\ k_k = \frac{4}{12}$ tästä tulee $\frac{1}{3}$

l: $3x + y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = -3x - 4,\ k_l = -3$

jäsennelty suoraan tehtävään +

Suorat ovat yhdensuuntaiset, kun kulmakertoimet ovat yhtä suuret.

Yhdensuuntaiset suorat:

f ja j: molempien kulmakerroin on -2

sekä h ja k molempien kulmakerroin on $\frac{1}{3}$

Suorat ovat toisiaan vasten kohtisuorassa, kun niiden kulmakertoimien tulo on -1.

Kohtisuorassa olevat suorat:

h ja l: $\frac{1}{3} \cdot -3 = -1$ Tämä on oikein

mitkään muut suorat ei ole kohtisuorassa toisiaan vastaan

f: $2x + y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 5,\ k_f = -2$

g: $-2x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2},\ k_g = ? 0$

h: $2x - 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2x+5}{6},\ k_h = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

i: $3y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3},\ k_i = ? = 0$

j: $2x + y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 3,\ k_j = -2$

k: $4x - 12y - 15 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4x-15}{12},\ k_k = \frac{4}{12} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

l: $3x + y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = -3x - 4,\ k_l = -3$

jäsennelty suoraan tehtävään +

k ja l

h ja k

Suorat ovat yhdensuuntaiset, kun kulmakertoimet ovat yhtä suuret.

Yhdensuuntaiset suorat:

f ja j: molempien kulmakerroin on -2 ✓. + H ja k koska molemmilla $k = \frac{1}{3}$

Suorat ovat toisiaan vasten kohtisuorassa, kun niiden kulmakertoimien tulo on -1.

Kohtisuorassa olevat suorat:

h ja l: $\frac{1}{3} \cdot -3 = -1$

$\frac{1}{3} = -1 \mid \cdot \frac{3}{1}$ $\emptyset$

$= -\frac{3}{1}$

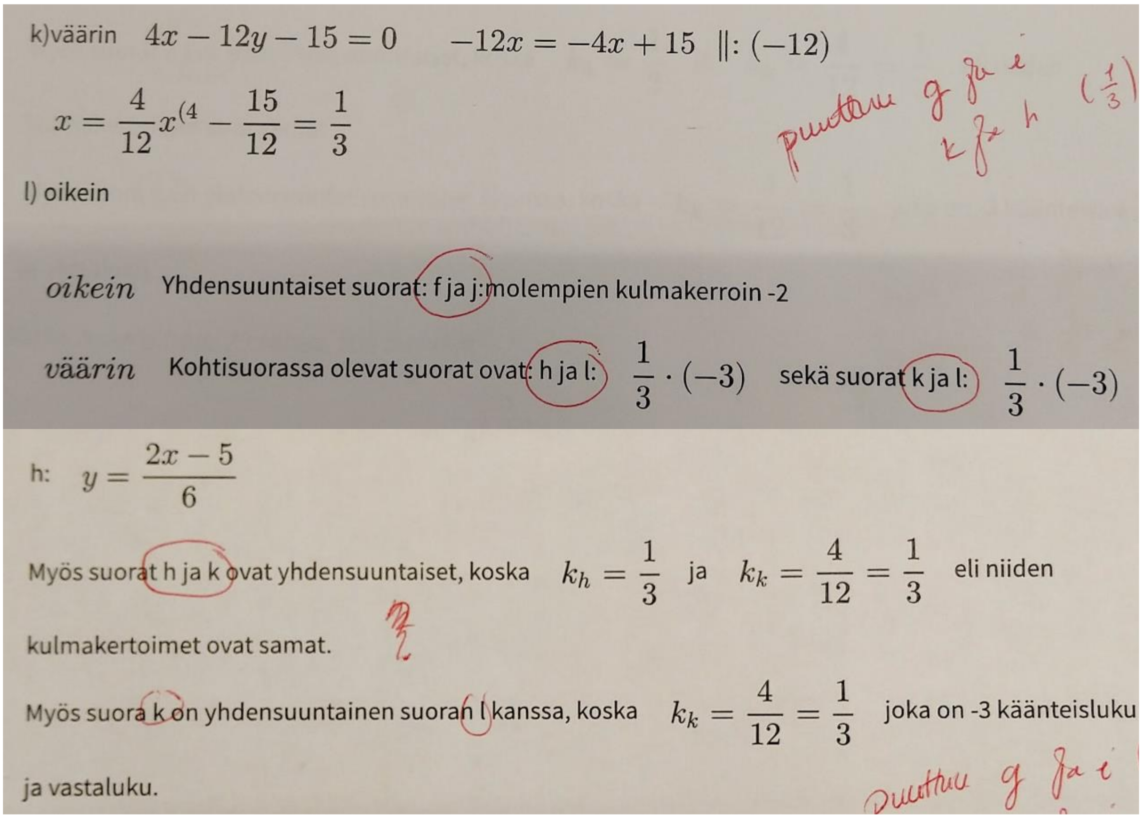
g ja i

väärin

Pitäisi olla vastaluvun käänteisluku

Kuva 7. Kahden opiskelijan paperille tehdyt ratkaisut Tehtävään 3.

Kuvassa 8 on samaiseen Tehtävään 3 esimerkkinä kaksi ratkaisua tietokoneella vastattuna, joissa ratkaisut kirjoitettiin suoraan tehtävänannon ja valmiina annetun ratkaisun alapuolella olleeseen tekstikenttään. Koska tehtäviin ei ollut mahdollista kirjoittaa vastaustaan muualle, ovat ratkaisut ulkonäöltään erilaisia kuin paperilla vastanneilla opiskelijoilla. Molemmat opiskelijat olivat jaotelleet ratkaisunsa niin, että ensin ratkaisivat jonkin suoran kulmakertoimen, sitten ilmoittavat yhdensuuntaiset suorat ja ensimmäinen opiskelija ilmoittaa myös muut keskenään kohtisuorassa olevat suorat.



Kuva 8. Kahden opiskelijan tietokoneella tehdyt ratkaisut Tehtävään 3.

Molemmissa Kuvissa 7 ja 8 olevat punaisella kynällä tehdyt merkinnät eivät ole opiskelijoiden tekemiä omia vastausmerkintöjä. Merkinnät on tehty opiskelijoiden ratkaisuihin myöhemmin aineiston analysoinnin aikana, jotta ratkaisuja oli helpompi jaotella ja analysoida niiden ominaisuuksien perusteella.

4.3.1 Tietokoneella ratkaistuna

Tietokoneella tehtävään vastanneista kuusi vastasi tehtävän olevan kokonaan oikein, joten vain viisi opiskelijaa eli 45 % vastaajista oli ruvennut korjaamaan ratkaisua edes johonkin suuntaan. Näistä ratkaisua korjanneista lopulta yksikään ei saanut tehtyä tehtävää täysin oikein. Annetussa ratkaisuyrityksessä oli annettuna valmiina yhdensuuntaisiksi suoriksi f ja j sekä kohtisuoriksi suoriksi h ja l. Oikeassa ratkaisussa olisi huomattu, että myös suorat k ja h ovat yhdensuuntaiset keskenään ja toisiaan vasten kohtisuorassa ovat suorat g ja i ja suorat k ja l.

Kaksi opiskelijaa olivat tehneet muuten oikean ratkaisun, mutta heiltä oli jäänyt huomaamatta toisiaan vasten kohtisuorassa olleet suorat g ja i. Näistä g on pystysuora suora, jonka kulmakerrointa ei voida määrittää ja i on vaakasuora suora, jonka kulmakerroin on nolla. Suorien yhtälöiden ratkaisun jälkeen niistä voidaan huomata, että ne ovat toisiaan vasten kohtisuorassa, koska suora g on y-akselin suuntainen suora ja suora i on x-akselin suuntainen suora. Yksi opiskelija oli huomannut suorien kohtisuoruuden, mutta perustellut sen virheellisesti sanoen *”G ja i suorien kulmakerroin on sama 0, koska suora g on vaakasuora ja i pystysuora”*, mikä ei pidä paikkaansa. Suoran i kulmakerroin on nolla, koska se vaakasuora ja suoran g kulmakerroin ei voida määrittää, koska suora on pystysuora.

Kaksi opiskelijaa, joilta oli jäänyt huomaamatta nämä kohtisuorassa olevat suorat g ja i, olivat ansiokkaasti perustelleet muiden suorien ominaisuuksia. Tässä toisen opiskelijan perustelu:

> *”k: kulma kerroin on* $\frac{1}{3}$ *kun suorat ovat yhdensuuntaiset niiden kulmakertoimet ovat samat, joten yhdensuuntaiset suorat ovat f ja j, niiden kulmakerroin on* -2 *sekä h ja k, niiden kulmakerroin on* $\frac{1}{3}$*. Kohtisuorassa olevat suorat ovat h ja l, koska* $\frac{1}{3} \cdot (-3) = -1$ *sekä k ja l, koska* $\frac{1}{3} \cdot (-3) = -1$*”*

Yksi opiskelija perusteli omaa ratkaisuaan täysin sanallisesti ilman matemaattisia laskuja. Sanallinen selitys on sen verran selkeä, että siitä huomaa opiskelijan ymmärtäneen asian, vaikkei perustelujen tukena laskuja olekaan.

”Malliratkaisu on melkein oikein. f ja j ovat yhdensuuntaiset, mutta niin on myös k ja h, koska jos k:n vastauksen supistaa 4*:llä, niin vastauksena on sama kuin h:n kulmakerroin eli nekin ovat yhdensuuntaiset.”*

4.3.2 Paperilla ratkaistuna

Samoin kuin tietokoneella vastanneiden opiskelijoiden kesken, niin myöskään paperilla vastanneista kukaan ei osannut korjata annettua ratkaisuyritystä perustellen täysin oikeaksi. Lyhyimmän vastauksen antoi eräs opiskelija, joka oli kirjoittanut kahden ratkaisuyrityksessä täysin oikein laskettujen kulmakertoimien kohdalle *”väärin”* eikä ollut perustellut ratkaisuaan sen pidemmälle. Yhteensä 64 % eli seitsemän opiskelijaa oli kirjoittanut vastaukseksi, että annettu ratkaisu on jo täysin oikea eivätkä siten olleet lähteneet sitä korjaamaan. Jäljelle jääneet neljä opiskelijaa eli 36 % vastaajista olivat korjanneet valmiina annetun ratkaisun osittain oikeaksi.

Lähimmäksi oikeaa ratkaisua pääsi yksi opiskelija, joka löysi kaksi virhettä kolmesta. Hän oli huomannut molemmat ratkaisuyrityksestä puuttuneet kohtisuorat suorat, mutta ei ollut huomannut yhtä puuttuvaa suorien välistä yhdensuuntaisuutta. Hän selittää suorien g ja i sijainnin koordinaatistossa väärin päin, mutta toteaa oikein sanoen niiden olevan kohtisuorassa. Opiskelija perusteli molemmat puuttuvat kohtisuoruudet seuraavalla tavalla:

> *”Tehtävä on laskettu muuten oikein, mutta siinä ei ole laskettu muita kohtisuorassa olevia suoria. g ja i ovat kohtisuorassa, koska g = on x-akselin suuntainen ja i = on y-akselin suuntainen. l ja k ovat kohtisuorassa, koska* $-3 \cdot \frac{4}{12} = -\frac{12}{12} = -1$*”*

Loput kolme opiskelijaa olivat löytäneet jonkin yhden virheen kolmesta eli he olivat huomanneet joko jommatkummat toisiaan vasten kohtisuorassa olevat suorat tai suorat, jotka ovat yhdensuuntaisia keskenään. Heistä jokainen oli korjannut huomaamansa virheen täysin oikein. Tässä yhden opiskelijan lyhyt perustelu puuttuvista yhdensuuntaisuuksista, joka on asiayhteydessään ymmärrettävä: *”Sekä h ja k, molempien kulmakerroin on* $\frac{1}{3}$*.”.* Toisen opiskelijan pidempi perustelu valmiina annetun ratkaisun puuttuvaan kohtisuoruuteen: *”Myös g ja i ovat kohtisuorassa toisiaan vasten. g menee* *pystysuoraan y-akselin suuntaisesti ja i menee vaakasuoraan x-akselin suuntaisesti."* Kolmas opiskelija huomasi myös puuttuvat kohtisuorat suorat, mutta hän ei perustellut löytöään sen enempää. Hän oli kirjoittanut vastaukseen "*g ja i*" ja oli vetänyt nuolen tästä lauseesta valmiina annettuun ratkaisuun sanan "*Kohtisuorassa*" kohdalle. Yhdensuuntaiset suorat h ja k hän perusteli sanomalla "*koska molemmilla* $\mathrm{k} = \frac{1}{3}$".

4.4 Tehtävä 4: Pisteen etäisyys suorasta

Taulukossa 3 esitetään vastausmuotojen mukaan yhteenvetoa tehtävään 4 saaduista ratkaisuista. Tietokoneella tähän tehtävään vastasi 11 opiskelijaa ja samoin paperilla 11 opiskelijaa, jolloin vastauksia saatiin yhteensä 22 kappaletta. Vastausmuotojen välillä verrattaessa huomataan, että vastauksien pituuksien keskiarvo on molemmilla vastaustavoilla lähes yhtä suuri. Mediaaneja vertailtaessa eroa on enemmän. Paperille tehdyt vastaukset olivat mediaanipituudeltaan 44 % pidemmät kuin tietokoneelle tehdyt vastaukset. Kun verrataan tietokoneella ja paperilla tehtyjen vastausten sisältäviä lauseita ja näissä lauseissa olevien sanojen määrää, ei eroa vastausmuodon välillä ole juuri lainkaan. Molemmilla tavoilla vastattuna ratkaisussa oli keskimäärin kolme lausetta ja näissä yhteensä noin 20 sanaa, mikä tarkoittaa noin kuutta sanaa jokaista lausetta kohden.

Taulukko 3: Tehtävään 4 saatujen vastausten yhteenveto.

Vastausmuoto	Perusteltu täysin oikein	Perusteltu osittain oikein	Perusteltu väärin	Vastausten pituuden keskiarvo (merkkiä)	Vastausten pituuden mediaani (merkkiä)	Vastausten lauseet ja sanat (keskiarvot)
Tietokone (11)	4 (36 %)	5 (45 %)	2 (18 %)	138	102	3,1 ja 20
Paperi (11)	1 (9 %)	8 (73 %)	2 (18 %)	137	147	3,1 ja 19
Yhteensä (22)	5 (23 %)	12 (55 %)	5 (23 %)	138	146	3,1 ja 20

Tehtävän 4 perusteli oikein neljä opiskelijaa eli 36 % vastaajista, kun taas paperilla tämän tehtävän perusteli täysin oikein yksi opiskelija eli 9 % vastaajista. Tarkasteltaessa tietokoneella tehtyjä oikein tai osittain oikein tehtyjä ratkaisuja oli 81 % kaikista ratkaisuista. Saman tehtävän paperilla ratkaisseista opiskelijoista 82 % vastasi tehtävään joko oikein tai osittain oikein perustellen. Myös tämän tehtävän kohdalla tietokoneella vastanneet opiskelijat siis suoriutuivat paremmin kuin paperilla vastanneet, mutta jos tarkastellaan samalla myös osittain oikein tehtyjä ratkaisuja, erot ryhmien välillä tasoittuvat.

4.4.1 Tietokoneella ratkaistuna

Tietokoneella tehtävän ratkaisun tehneistä opiskelijoista täysin oikein sen heistä sai tehtyä neljä opiskelijaa eli 36 % vastaajista. Osittain oikein tehtävän oli ratkaissut viisi opiskelijaa eli 45 % vastaajista ja loput heistä, eli kaksi opiskelijaa, olivat perustelleet tehtävän väärin. Väärin perustelleista opiskelijoista toinen vastasi tehtävän olevan täysin oikein, eikä perustellut ratkaisuaan pidemmälle. Toinen oli löytänyt valmiiksi annetusta ratkaisusta osoittajassa olevan ylimääräisen $5t$ - lausekkeen, jota hän oli aloittanut korjaamaan. Hän ei kuitenkaan vienyt ratkaisuaan loppuun asti eikä hän ollut selittänyt, miksi hänen mielestään valmiiksi annetussa ratkaisussa olisi ylimääräinen $5t$, jota siellä ei tosiasiassa ollut.

Kahdessa osittain oikein perustelluissa ratkaisussa ei ollut korjattu annetun ratkaisun jakolaskun nimittäjässä olevaa virhettä, jossa lausekkeesta $\sqrt{5^2 + 12^2}$ oli suoraan supistettu neliöjuuri ja toiset potenssit pois niin, että jäljelle nimittäjään jäi $5 + 12$. Tämä kuitenkin on väärin, koska ensin on suoritettava neliöjuuren sisällä olevat laskutoimitukset ja siten saataisiin oikea ratkaisu, mikä tässä tapauksessa olisi $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$. Molemmat opiskelijat olivat huomanneet tehtävässä olleen toisen virheen, koska he olivat korjanneet kaavaan väärin sijoitetut x:n ja y:n arvot ja saaneet tämän kohdan tehtyä oikein.

Lopuissa kolmessa osittain oikein ratkaistuissa vastauksissa oli huomattu ja korjattu oikein neliöjuurilausekkeeseen liittynyt virhe. Heistä jokainen oli myös huomannut kaavaan sijoittamiseen liittyneen virheen. Muutoin näissä kolmessa ratkaisussa huolimattomuusvirheitä, kuten kahdessa ratkaisussa oli laskemisen ja sieventämisen jälkeen jakolaskun osoittajaan jäänyt vakiota t. Tällöin se ei supistunutkaan ratkaisusta pois, vaan jäi näyttämään siltä, että pisteen etäisyys suorasta olisikin riippuvainen kyseisestä vakiosta t. Yksi näistä opiskelijoista oli saanut tehtyä ratkaisun, jossa vakio t supistui pois, mutta hän oli tehnyt muualla osoittajan kertolaskussa virheen, jonka takia lopullinen vastaus ei ollut täysin oikea.

Kahdessa oikein perustellussa vastauksessa on molemmissa aloitettu kertomalla siitä, kuinka koordinaattien x ja y arvot on sijoitettu valmiina annetussa ratkaisussa väärin päin. Tämän jälkeen on tehty tarvittavat laskutoimitukset, jonka jälkeen sanallisesti kerrotaan ratkaisun tulos. Toiset kaksi oikein perusteltua vastausta alkavat suoraan laskutoimituksella, jonka lopputulemana opiskelijat ovat selittäneet, että etäisyys ei siten voi riippua vakion t arvosta. Alla yhdet esimerkit molemmista perustelutavoista.

Tässä ratkaisussa opiskelija aloittaa vastauksensa sanallisella selityksellä, perustelee pituuden arvon laskemalla ja päätyy lopputulemaan.

> *”Laskukaava on oikein, mutta laskussa x:n paikalle on sijoitettu y:n arvo ja y:n paikalle x:n arvo.*
>
> $d = \frac{|5 \cdot 3t + 12 \cdot (7-t) + (-27t)|}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{84}{13}$
>
> *Etäisyys ei riipu vakion t arvosta, koska se supistuu pois. Esimerkiksi, kun* $t = 0$*, etäisyys* $d = \frac{84}{13}$*”*

Tässä ratkaisussa opiskelija aloittaa perustelun suoraan laskemalla ja perustelee sen kautta ratkaisunsa tuloksen.

> ”$d = \frac{|5 \cdot 3t + 12 \cdot (7-t) + (-27t)|}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{84}{13}$
>
> *t supistuu pois, joten pisteen etäisyys ei riipu vakion t arvosta”*

Yhdessäkään näistä neljästä oikein perustelluista ratkaisuista ei sanallisesti selitetä toista virhettä, eli nimittäjässä olevaa neliöjuurilausekkeen laskemista. Tämä on kuitenkin laskettu oikein jokaiseen neljään oikein perusteltuun ratkaisuun.

4.4.2 Paperilla ratkaistuna

Paperilla tehtävään vastanneista kaksi opiskelijaa eli 18 % vastaajista ratkaisi tehtävän väärin. Nämä opiskelijat olivat kopioineet kokonaan valmiina annetun ratkaisun vastauspaperiinsa ja todenneet loppuun sen olevan täysin oikein. Osittain oikein perusteltuja ratkaisuja oli kahdeksan kappaletta eli 73 % kaikista vastauksista. Näistä kahdeksasta ratkaisusta kolmessa opiskelijat olivat huomanneet, että x- ja y-koordinaattien arvot ovat sijoitettu väärin päin kaavaan ja he olivat jokainen korjanneet tämän kohdan omaan ratkaisuunsa oikein. He eivät kuitenkaan olleet korjanneet nimittäjässä ollutta neliöjuurta ja potensseja sisältävää lauseketta, jonka vuoksi heidän ratkaisunsa eivät olleet täysin oikein. Kahdessa muussa ratkaisussa oli huomattu sama kaavaan sijoittamisen virhe, mutta opiskelijoiden sitä korjatessa he eivät saaneet vakiota t supistumaan lausekkeesta pois. Molempien opiskelijoiden ratkaisuista puuttuu välivaiheita, jonka vuoksi on hankala sanoa, missä vaiheessa opiskelija on laskenut tehtävän väärin.

Lopuista kolmesta osittain oikein perustelluista vastauksista ensimmäisessä oli huomattu, ettei nimittäjässä koroteta potenssiin ja sen jälkeen lasketa neliöjuurta. Hän oli korjannut tämän ja todennut vastauksen olevan sen jälkeen oikein. Toisen opiskelijan ratkaisussa oli myös huomattu sama virhe, mutta hän oli ollut saanut korjattua sitä oikein, koska hän sai neliöjuuren alle väärän luvun. Kolmannessa ratkaisussa opiskelija löysi x- ja y-koordinaattien väärin sijoittamisen sekä neliöjuurilausekkeen väärin laskemisen valmiina annetusta ratkaisusta ja oli sen merkannut selkeästi vastauspaperiinsa. Hän oli aloittanut kirjoittamaan etäisyyden lauseketta ja sijoittanut siihen arvot oikein. Hän ei kuitenkaan laskenut tätä yhtään pidemmälle eikä myöskään antanut vastausta tehtävänannon kysymykseen, onko pisteen etäisyys riippuvainen vakion t arvosta vai ei, jonka takia hänen vastauksensa jää vajavaiseksi.

Täysin oikein ratkaistuna tehtävä löytyi yhden opiskelijan vastauspaperista, joka vastaa 9 %:a vastaajista. Hän oli huomannut molemmat valmiina annetussa ratkaisussa olleet virheet, jotka hän oli korjannut mallikkaasti oikein. Hän ei ollut sieventänyt nimittäjässä ollutta $\sqrt{169}$, mutta ratkaisun paikkaansa pitävyyteen se ei vaikuta. Hän ei kuitenkaan totea saadusta ratkaisusta sitä, onko laskettu etäisyys riippuvainen vakion t arvosta, mutta vastaus itsessään on oikein.

> *"Väärin, x ja y ovat kirjoitettu ratkaisuun väärin päin. 5 ja 12 potenssit laskettu väärin.*
>
> $d = \frac{|5\cdot(3t)+12\cdot(7-t)+(-27t)|}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{|15t+84+12t-27t|}{\sqrt{25+144}} = \frac{|84+0|}{\sqrt{169}} = \frac{|84|}{\sqrt{169}} = \frac{84}{\sqrt{169}}$ "

4.5 Kokonaismenestys kokeessa

Taulukkoon 4 on koottu opiskelijoiden kokonaismenestystä kokeessa ryhmittäin ja tehtävittäin eriteltynä. Opiskelijoiden kokonaismenestystä kokeessa arvioitiin pisteyttämällä saadut ratkaisut niin, että oikein perustellusta ratkaisusta sai kaksi pistettä, osittain oikein perustellusta ratkaisusta sai yhden pisteen ja väärin perustellusta ei saanut yhtäkään pistettä. Tehtävän 1 b-kohdasta sai yhden pisteen, jos sen oli perustellut oikein, muuten pistettä b-kohdasta ei saanut. Ryhmällä A tarkoitetaan ryhmää, joka teki Tehtävät 1 ja 2 tietokoneella ja tehtävät 3 ja 4 paperilla. Ryhmällä B vastaavasti tarkoitetaan ryhmää, joka teki tehtävät 1 ja 2 paperilla ja tehtävät 3 ja 4 tietokoneella. Taulukkoon 4 on myös koottu ryhmän saavuttamat kokonaispisteet, joita on verrattu siihen pistemäärään, jos jokainen ryhmän opiskelija olisi vastannut tehtävään perustellen oikein. Tästä on saatu laskettua ryhmän saavuttama keskiarvo jokaisen tehtävän kohdalle ja tämän keskiarvon avulla on saatu laskettua keskihajonnat.

Taulukosta 4 voidaan nähdä, että molemmat ryhmät A ja B menestyivät Tehtävän 1 niin a- kuin b-kohdissa yhtä hyvin eli ryhmät saivat a-kohdasta 1,4 pistettä ja b-kohdasta 0,7 pistettä eli yhteensä koko tehtävästä 2,1 pistettä. Tämä kattaa 70 % maksimipistemäärästä ja tässä tehtävässä molemmat ryhmät onnistuivat parhaiten saaden korkeimmat pisteet kaikista tehtävistä. Tehtävässä 3 ryhmä A sai keskiarvollisesti 0,1 pistettä huonomman tuloksen kuin ryhmä B. Ero ei kuitenkaan ole merkittävä, koska molemmat ryhmät saivat tehtävästä melko alhaiset pisteet saaden enintään 25 % maksimipisteistä tai sen alle. Tehtävässä 4 eroa vastaajaryhmien välillä oli eniten, koska ryhmä A sai keskiarvollisesti 0,3 pistettä huonomman tuloksen kuin ryhmä B. Molempien ryhmien vastaukset kattoivat kuitenkin 50 - 60 % maksimipisteistä, joten suurta eroa ei tämänkään tehtävän kohdalla ollut kokonaismenestyksen kannalta katsottuna.

Taulukko 4: Opiskelijoiden kokonaismenestys kokeessa pisteytettynä tehtävittäin ja vastaajaryhmittäin eriteltynä.

Tehtävä ja maksimi-pistemäärä	Ryhmä ja vastausmuoto	Perusteltu täysin oikein ja pisteet	Perusteltu osittain oikein ja pisteet	Kokonaispisteet ja vastaava pistemäärä	Keski-hajonta
Tehtävä 1, (3 p)					
a-kohta (2 p)	A, tietokone (10)	6 (12 p)	2 (2 p)	14 / 20 eli 1,4 p	0,80
	B, paperi (12)	7 (14 p)	3 (3 p)	17 / 24 eli 1,4 p	0,76
b-kohta (1 p)	A, tietokone (10)	7 (7 p)	-	7 / 10 eli 0,7 p	0,46
	B, paperi (12)	8 (8 p)	-	8 / 12 eli 0,7 p	0,47
Tehtävä 3, (2 p)	A, paperi (11)	0	4 (4 p)	4 / 22 eli 0,4 p	0,48
	B, tietokone (11)	0	5 (5 p)	5 / 22 eli 0,5 p	0,50
Tehtävä 4 (2 p)	A, paperi (11)	1 (2 p)	8 (8 p)	10 / 22 eli 0,9 p	0,58
	B, tietokone (11)	4 (8 p)	5 (5 p)	13 / 22 eli 1,2 p	0,80

Keskihajonnalla voidaan kuvata sitä, kuinka kaukana keskiarvosta aineiston havaintoarvot keskimäärin ovat. Mitä suurempi keskihajonta on laskettu tehtävään saadusta kokonaispisteiden keskiarvosta, sitä enemmän opiskelijoiden saamat pistemäärät eroavat toisistaan vastaajaryhmän sisällä. Keskihajonta pysyy alle yhden jokaisen tehtävän kohdalla, mikä on melko järkevää, koska tehtävien maksimipisteet olivat 2 pistettä ja Tehtävän 1 b-kohdassa yhden pisteen verran. Keskihajonta on melkein yhtä suuri niin Tehtävän 1 ja 3 kohdalla molemmissa vastaajaryhmissä. Tämä kertoo siitä, ettei ryhmien välillä ole suurta eroa siinä, miten opiskelijat ovat onnistuneet vastaamaan tehtäviin. Tehtävän 4 kohdalla on enemmän eroa, koska ryhmän A keskihajonta on 0,58, kun taas ryhmälle B keskihajonnaksi on saatu 0,8. Ero näiden keskihajontojen välillä on

0,22, kun taas muiden tehtävien kohdalla ryhmien välinen keskihajonta on 0,01 - 0,04 välillä. Tämä kertoo siitä, että ryhmän B sisällä on enemmän eroa opiskelijoiden välillä siinä, miten he ovat osanneet Tehtävän 4 perustella, kun taas ryhmän A sisällä. Muiden tehtävien kohdalla keskihajonnat on samaa luokkaa, joten eroa ei niinkään ole opiskelijoissa ryhmien sisällä eikä ryhmien A ja B välillä.

Taulukosta 4 nähdään myös, että ryhmä A sai kokeesta yhteensä 3,4 pistettä ja ryhmä B sai yhteensä 3,8 pistettä. Maksimipistemäärä näistä kolmesta tehtävästä oli 7 pistettä, joten tämän perusteella ryhmä B menestyi pistemäärällisesti hieman ryhmää A paremmin. Ryhmän B saamat pisteet vastaavat 54 %:a maksimipistemäärästä, kun taas ryhmän A saamat pisteet ovat 49 % koko maksimipistemäärästä. Eroa ryhmien onnistumisen välillä prosentuaalisesti oli siis 5 %.

Luku V

Pohdinta

Tässä luvussa käydään läpi sitä, miten tutkielma onnistuu vastaamaan alkuperäiseen tutkimusongelmaan. Siksi aluksi käsitellään tutkimusongelma ja päätulokset. Sen jälkeen käsitellään ongelmanratkaisukykyjen ja vastausmuodon vaikutuksia ratkaisuihin. Tämän jälkeen käsitellään parannusehdotuksia kokeen tehtäviin ja niiden ohjeistuksiin sekä pohditaan tehtävien onnistumista. Lopuksi käydään läpi tutkimuksen luotettavuutta ja mahdollisia jatkotutkimuksen aiheita.

5.1 Tutkimusongelma ja päätulokset

Tutkimuksen tarkoituksena oli tutkia opiskelijoiden tekemiä vastauksia kokeen tehtäviin, joissa tehtävänä oli arvioida valmiiksi annettuja ratkaisuja. Näistä opiskelijoiden ratkaisuista arvioitiin, kuinka hyvin opiskelijat kykenevät tämän tyyppisiä tehtäviä ratkaisemaan. Opiskelijoiden tekemien vastauksien eroja ja yhtäläisyyksiä tutkittiin eri näkökulmista käsin. Tarkoitus oli nähdä eroja opiskelijoiden ratkaisuissa vastausmuotojen välillä ja nähdä vastausmuodon vaikutuksia tehtyyn ratkaisuun.

Koska vastaajajoukko oli lopulta kovin pieni, ei tulosten pohjalta voida yleistää kovinkaan paljoa. Opiskelijoiden ratkaisuista oli huomattavissa, että jonkin yhden tai useamman matemaattisen ongelmanratkaisukyvyn puuttuessa tai ollessa muita heikompi, oli ratkaisu mitä todennäköisimmin vain osittain oikein perusteltu tai perusteltu kokonaan väärin. Tuloksista huomattiin myös, ettei vastausmuodolla ollut merkitystä sen suhteen, miten monta opiskelijaa sai ratkaistua tehtäviä oikein tai osittain oikein, koska molemmilla vastausmuodoilla niitä saatiin melkein yhtä paljon. Tämä oli kuitenkin jossain määrin tehtäväkohtaista, koska esimerkiksi Tehtävään 4 saatiin tietokoneella vastattuna enemmän oikeita ratkaisuja kuin paperilla vastattuna. Eroja eri vastausmuodoilla tuotettujen ratkaisujen välillä oli siten, että keskiarvollisesti pidempiä ja enemmän sanallisia selityksiä sisältäviä ratkaisuja saatiin tietokoneella vastattuna. Mitään suurempia eroja ei vastausmuotojen välillä ollut.

Molemmat vastaajaryhmät A ja B suoriutuivat kokeesta toisiinsa verrattuna melkein yhtä hyvin, koska ryhmä A sai 49 % maksimipistemäärästä ja ryhmä B sai 54 % samaisesta pistemäärästä. Parhaiten molemmilla ryhmillä onnistui Tehtävä 1, seuraavaksi parhaiten Tehtävä 4 ja huonoiten Tehtävä 3. Tämä kertoo siitä, ettei ryhmien A ja B välillä ollut suuria matemaattisen osaamisen eroja eli molemmissa ryhmissä oli tasaisesti matemaattisesti lahjakkaita opiskelijoita kuin niitä, joille tehtävät tuottivat enemmän haasteita. Ryhmien A ja B sisällä oli myöskin tulosten perusteella tasaisesti kaikkia eri matemaattisten taitojen omaavia opiskelijoita. Tämä on huomattavissa siitä, että keskihajonnat eivät olleet lähellä nollaa, joka kertoisi opiskelijoiden tekemien ratkaisujen olleen kaikkien yhtä hyviä tai huonoja. Tämän vuoksi voisi siis sanoa vastaajajoukon edustaneen pienuudestaan huolimatta hyvin pitkän matematiikan opiskelijoiden joukkoa.

5.2 Ongelmanratkaisukykyjen vaikutus

Melkein kaikista ratkaisuista oli selkeästi huomattavissa ongelmanratkaisun eri kyvyt (Ballew & Cunningham, 1982), joita ilman opiskelijan oli miltei mahdoton tehdä täysin oikein tai osittain oikein perusteltuja ratkaisuja. Oikein perustelluista ratkaisuista huomataan, että opiskelijan on täytynyt tunnistaa ensin ongelma, sitten tulkita ja käsitellä sen sanallista informaatiota, sen jälkeen suorittaa niitä laskutoimituksia, joita tehtävän ratkaiseminen vaatii. Näitä taitoja yhdistämällä opiskelija on osannut muodostaa ongelman kokonaisratkaisun. Muutama täysin oikein perusteltu ratkaisu oli tehty ilman yhtäkään laskutoimitusta, mutta niiden sanallinen selitys oli kattava ja lopputulos oikea, joka kertoo opiskelijan hallitsevan myös kyvyn soveltaa oikeanlaisia laskutoimituksia sanallisesti selittämällä.

Adaptiivisen päättelyn heikkous (Ballew & Cunningham, 1982) näkyi muun muassa Tehtävässä 3, jossa oli ratkaistu eri suorien kulmakertoimia. Tehtävässä oli kaksi suoraa, jotka olivat koordinaattiakseleiden suuntaisia suoria ja tämä olisi ollut mahdollista huomata annettujen suorien yhtälöistä. Kuitenkin jotkut opiskelijoista olivat jättäneet nämä suorat kokonaan käsittelemättä ja siten niiden osallisuudet kohtisuoruuksiin tai yhdensuuntaisuuksiin oli jätetty kokonaan huomiotta.

Tutkimuksen toteutuslukion opettajan mukaan pari opiskelijaa olivat suoraan kirjoittaneet vastaukseksi jokaiseen tehtävään kaikkien olevan oikein ja lähteneet koetilasta vähimmäisajan jälkeen pois. Tämä tietenkin vääristää tuloksia suuntaan, että näihin tehtäviin tuli täysin väärin perusteltuja ratkaisuja, koska he eivät ole edes yrittäneet tehdä annetuille ratkaisuyrityksille mitään. Yritteliäisyys eli se, että opiskelija näkee matematiikan mielekkäänä (Ballew & Cunningham, 1982), olisi auttanut näitä opiskelijoita vastaamaan edes jotain näihin tehtäviin. He eivät kuitenkaan voineet saada kokeesta kovinkaan hyvää arvosanaa, koska yksikään valmiina annettu ratkaisu ei ollut täysin oikein.

5.3 Vastausmuodon vaikutus

Tutkimukseen vastanneet opiskelijat olivat ensimmäisen vuoden opiskelijoita, jotka olivat siihen mennessä opiskelleet lukiossa noin kahdeksan kuukauden ajan. Tänä aikana he ovat opetelleet tietokoneen käyttöä sekä tarvittavia ohjelmia, joilla matemaattista tekstiä voidaan tuottaa niin kurssikokeissa kuin ylioppilaskokeissa. Koska opiskelijoilla on ollut verrattain vähän aikaa opetella tietokoneella vastaamista, pakostakin tietokoneella vastaaminen on vaikuttanut opiskelijoiden tekemien ratkaisujen muotoon. En kuitenkaan väittäisi, että vaikutus olisi ollut yhtään huonompaan suuntaan.

Tutkimuksen tuloksista huomattiin, ettei vastausmuodolla näyttänyt olevan lopulta vaikutusta siihen, kummalla niistä saataisiin samaan tehtävään enemmän oikein tai osittain oikein perusteltuja ratkaisuja. On kuitenkin huomion arvoista, että vastausmuodolla oli vaikutusta siihen, kuinka jäsenneltyjä ja loppuun harkittuja opiskelijoiden tekemät ratkaisut olivat. Samaan tehtävään tulleet ratkaisut erosivat toisistaan ulkonäöllisesti riippuen siitä, kummalla vastausmuodolla ratkaisu oli tehty.

Opiskelijoiden tekemistä ratkaisuista oli havaittavissa, että omaa ratkaisua selostettiin enemmän, kun vastausmuotona oli tietokone. Tätä tukee myös Åkerfeldtin (2014) kirjoittama artikkeli, jossa huomattiin tietokonetta käytettävän ajattelun ulkoistamiseen ja sen järjestelyn apuvälineenä. Tällöin niin sanallisista selityksistä kuin matemaattisista laskuista tulee jäsennellympiä ja harkitumpia. Tietokoneella kirjoittaessa teksti oli jäsennellympää ja selkeämmin luettavissa, kun taas paperilla kirjoitettuna muutamien opiskelijoiden käsiala oli suttuista ja sekavaa. Tietokoneella tehty teksti on siten helpommin luettavaa, eikä aikaa mene tehtävän korjaajalla sen miettimiseen, mitä opiskelija on tehtävään vastannut. Tietokoneella tehdyissä vastauksissa oli huomattavissa enemmän lauseita ja niissä olevia sanoja kuin paperilla tehtyinä. Samalla se tarkoittaa myös sitä, että tietokoneella tehdyissä vastauksissa merkkejä oli enemmän.

Paperilla vastanneet opiskelijat ajattelevat vastauksensa valmiiksi mielessään ja kun ovat kirjoittaneet sen ylös, he harvoin muokkaavat sitä eteenpäin (Åkerfeldt, 2014). Tämä oli huomattavissa juuri siitä, että paperille kirjoitetut sanalliset perustelut olivat lyhyempiä verrattuna tietokoneella vastanneiden perusteluihin. Paperille tehdyt ratkaisut olivat ytimekkäämpiä eli niissä oli vähemmän sanoja jokaista lausetta kohden kuin tietokoneella tehtynä. Paperille tehdyissä vastauksissa oli havaittavissa enemmän matemaattista sisältöä sanallisiin perusteluihin verrattuna, kun taas tietokoneella tehdyissä vastauksissa oli melko saman verran sanallisia selityksiä kuin matemaattisia perusteluja oman ratkaisun tukena.

Paperille vastanneet opiskelijat olivat kirjoittaneet valmiiksi annettuihin ratkaisuihin suoraan virheen kohdalle joko ”Väärin” tai he olivat tehneet kynällä alleviivauksen virheen kohdalle tai ympyröineet kyseessä olleen virheen. Tämän jälkeen he olivat lähteneet perustelemaan tehtävän alapuolelle tyhjään kohtaan omaa ratkaisuaan yleensä sanallisesti. Tätä ei kuitenkaan jokainen opiskelija ollut tehnyt, vaan saattoi suoraan alkaa korjaamaan ratkaisuaan matemaattisesti. Tietokoneella vastattaessa tällainen merkitseminen suoraan tehtävänantoon ja valmiina annettuun ratkaisuun ei ollut mahdollista, koska vastaaminen tapahtui Abitti-ympäristössä, jossa oma ratkaisu kirjoitetaan tyhjään tekstikenttään. Löytyneitä virheitä oli mahdollista selittää tekstikenttään sanoin tai suoraan matemaattisella lausekkeella ilman sanallista selitystä. Tämä oli yksi selkeä ero, mitä paperilla ja tietokoneella tehdyistä ratkaisuista oli helposti huomattavissa. Tämä ero korostui eniten Tehtävän 3 kohdalla, jossa tehtävänanto ja valmiina annettu ratkaisu oli sijoitettu niin, että paperilla vastattaessa oli helppo kirjoittaa tyhjinä olleisiin kohtiin tehtävänannossa ja valmiina annetussa ratkaisussa eikä välttämättä enää ollut tarvetta käyttää tyhjänä ollutta vastaukselle varattua tilaa.

5.4 Parannusehdotuksia kokeeseen ja tehtäviin

Tutkimuksen toteutuksen ja tutkimusaineiston analysoinnin jälkeen oli huomattavissa, että kokeeseen ja sen tehtäviin voisi tehdä muutamia muutoksia. Näitä ovat esimerkiksi tehtävänantojen sanamuotoihin liittyviä seikkoja, joita muuttamalla niistä tulisi helpommin ymmärrettäviä ja siten opiskelijat osaisivat aloittaa vastaamaan tehtäviin. Sen takia seuraavaksi käsitellään erilaisia parannusehdotuksia kokeeseen sekä sen tehtäviin ja lopuksi käsitellään tuntemuksia valmiiden ratkaisujen arvioinnista.

Yksi tutkimuksen tuloksiin vaikuttava kysymys, mikä tuli esille vasta tutkimusaineistoa analysoitaessa oli se, että ymmärsivätkö kaikki opiskelijat, että valmiina annetussa ratkaisussa voi olla virheitä yhden sijasta myös useita. Tehtävissä ei itsessään lukenut montako virhettä annettuun ratkaisuun oli sisällytetty. Ohjeistuksissa sanottiin ainoastaan se, että annetut ratkaisut voivat olla jollain tavalla virheellisiä ja ne täytyy korjata oikeaksi perustellen. Opiskelijoiden ymmärryksen helpottamiseksi tehtäviin olisi siis voinut lisätä jonkin vihjeen ratkaisuissa olevista virheiden määrästä tai siitä, että mikään annetuista ratkaisuista ei ole täysin oikein tehty.

Jälkikäteen ajateltuna suoran yhtälöön liittyneen tehtävänannon, eli Tehtävän 2, olisi pitänyt olla paremmin muotoiltu, jotta opiskelijat olisivat alkaneet korjaamaan ja ratkaisemaan sitä. Nyt kukaan ei tehnyt tälle tehtävälle mitään, koska valmiina annettu ratkaisu oli perusteltu annetun vakion arvon kanssa oikein. Tehtävänannossa luki seuraavalla tavalla: *”Määritä vakio* a *siten, että piste* $\mathrm{P}(1,\mathrm{a})$ *on samalla suoralla pisteiden* $\mathrm{A}(2,5)$ *ja* $\mathrm{B}(4,\mathrm{a}^2)$ *kanssa. Mitkä ovat pisteiden* P *ja* B *koordinaatit.”* Tehtävänantoa olisi pitänyt muokata esimerkiksi siten, että siinä olisi kysytty ”Millä vakion a arvoilla…” tai ”Määritä vakion a kaikki mahdolliset arvot…”, jolloin sanamuodosta olisi voinut päätellä vakion arvoja olevan enemmän kuin yksi.

Tehtävän 2 epäonnistumisen korjaamiseksi toinen vaihtoehto olisi ollut jättää tehtävänanto sellaiseksi kuin se jo nyt on, mutta muokata valmiina annettua ratkaisua. Tätä voisi muokata esimerkiksi siten, että siinä näkyisi molemmat mahdolliset vakion arvot, mutta ne olisivat jollain tavalla väärin laskettuna. Tämän pohjalta opiskelija korjaisi annettua tehtävää ja huomaisi, että molemmat arvot toteuttavat annetut ehdot eikä muita mahdollisia vakion arvoja ole. Valmiina annettuun ratkaisuun voisi vielä lisätä jonkin muun vakion arvon, joka näyttäisi siltä, että toteuttaisi annetut ehdot, mutta opiskelijan korjatessa tehtävää, hän huomaisi, ettei vakion arvo toteuta ehtoja.

Eräs huomioita ansaitseva seikka oli valmiina annetuissa ratkaisuissa olleet samankaltaiset virheet. Esimerkiksi Tehtävissä 1 ja 4 oli virhe kaavaan sijoituksessa samalla tavalla eli x:n ja y:n arvot olivat menneet valmiina annetussa ratkaisussa väärin kohtiin kaavassa. Olisi ollut kuitenkin parempi, että kokeen tehtävissä olisi ollut erilaisia virheitä, ettei samankaltaisuus toistuisi. Tuloksia tarkasteltaessa tämä ei tosin ollut vaikuttanut niihin siten, että opiskelijat olisivat alkaneet etsiä tehtävistä aina kaavaan väärin sijoitettuja arvoja.

Molemmat vastausmuodot huomioituna Tehtävän 1 oli perustellut täysin oikein 11 opiskelijaa kun taas täysin oikein perusteltuja ratkaisuja Tehtävään 4 oli tehty viisi kappaletta. Tästä voisi päätellä, että vaikka opiskelija olisikin esimerkiksi huomannut virheen Tehtävässä 1, ei hän välttämättä ollut sitä huomannut enää Tehtävässä 4, vaikka ne samankaltaisia ovatkin. Virheen tunnistamattomuuteen saattoi vaikuttaa myös sekin, että tehtävät eivät olleet peräkkäin vaan välissä oli kaksi muuta tehtävää ja niiden valmiit ratkaisuyritykset, joihin sijoitetut virheet olivat erityyppisiä näihin kahteen muuhun tehtävään verrattuna.

Tehtävät olivat sisällöiltään sellaisia, että ne testasivat jo opittuja taitoja, joita oli kurssilla käsitelty ennen koetta. Tehtävien järjestys kokeessa noudatti myös järjestystä, jossa ne on oppitunneilla opetettu ja sama järjestys on käytössä olleessa oppikirjassakin. Siten kokeen tehtävien voisi ajatella olevan loogisessa järjestyksessä, jossa ne alkavat perustehtävistä ja muuttuvat soveltavimmiksi kokeen loppua kohden. Näin ajateltuna kokeen tehtävien järjestys oli onnistunut, mutta niihin tehtyjen valmiina annettujen ratkaisujen sanamuotojen olisi pitänyt olla hieman tarkemmin ja selkeämmin ilmaistuja. Tällöin opiskelijat olisivat ymmärtäneet tehtävänannot ja annetut ratkaisut paremmin sekä ymmärtäneet sen, mitä ratkaisuista täytyisi lähteä korjaamaan.

Opettajan kysyessä oppilailta myöhemmin, mitä mieltä he olivat olleet tehtävistä ja niiden tavallisesta poikkeavasta luonteesta, olivat mielipiteet olleet yleisesti ottaen positiivisia. Opiskelijat olivat olleet sitä mieltä, että tällaisia tehtävänantoja voisi olla enemmänkin kokeissa tai oppitunneilla tehtävänä. Opiskelijat eivät kuitenkaan pitäneet sitä hyvänä ideana, että esimerkiksi kaikki kokeen tehtävät olisivat valmiiden ratkaisujen arviointia. Sama oli huomattu myös Jankon pro-gradu tutkielmassa (2015), jossa valmiiden ratkaisun arviointia oli käytetty oppimismenetelmänä lukion oppitunneilla. Ero tähän tutkimukseen on siinä, että Jankon tutkimuksessa ratkaisujen arvioinnin jälkeen tehtäviä ei ratkaistu perustellen oikeaksi. Voisi kuitenkin sanoa, että valmiiden ratkaisun arviointia voisi käyttää tehtävätyyppinä enemmänkin niin kokeissa kuin oppitunneilla. Tärkeää olisikin se, että valmiina annetuista ratkaisusta olisi etsittävä virheet, mutta myös korjattava ne perustellen oikein, koska se lisää opiskelijoiden taitoa sanallistaa omia matemaattisia ratkaisujaan. Myös muita positiivisia kokemuksia on opiskelijoilta kerätty liittyen valmiiden ratkaisujen arviointiin; toisten virheiden etsimistä pidettiin opettavaisena ja silmiä avaavana, koska sen avulla saattoi helpommin havaita myös omat virheensä ja matemaattiset puutteensa ja vastaavanlaisia tehtäviä toivottiin jokaiselle lukion matematiikan kurssille (Eronen, 2019).

5.5 Tutkimuksen luotettavuus ja jatkotutkimus

Koulun opettaja ohjeisti ja valvoi kurssin välikokeen, jonka jälkeen opettaja otti vastaajien nimet pois papereista, kun oli ensin arvioinut kunkin opiskelijan koesuorituksen. Tämän jälkeen hän toimitti opiskelijoiden tekemät vastaukset tutkimuksen tekijälle eteenpäin. Kaikista vastanneista opiskelijoista kaksi palautti kokeen ilman perusteluja eikä näyttänyt omaa osaamistaan, mutta myös nämä vastaukset otettiin mukaan tutkimukseen. Siten 20:n opiskelijan tekemiä ratkaisuja voidaan pitää tutkimuksen kannalta luotettavina, mikä pienentää vastaajajoukkoa entisestään. Vastaajajoukko pieneni alkuperäisestään sen vuoksi, että kaikki kurssia suorittaneet opiskelijat eivät olleet välikokeen teon ja siten tutkimuksen toteutuksen aikana paikalla erinäisistä syistä. Kerättyä aineistoa voidaan kuitenkin muilta osin pitää uskottavana, koska kyseessä oli kurssin arviointiin ja suorittamiseen vaikuttanut koe, jolloin siihen tehdyt vastaukset on tehty vakavissaan.

Tutkimuksen luotettavuutta vastausmuotojen välisen vertailun suhteen lisäsi välineen vaihto tehtävien teon välissä kahden eri vastausmuodon välillä. Tutkimuksen toteutuksen kannalta tämä lisäsi haastetta, koska olisi ollut helpompaa antaa toisen ryhmän vastata pelkästään paperilla ja toisen pelkästään sähköisesti tietokoneella eikä tällöin olisi mennyt aikaa välineen vaihtoon. On kuitenkin selvää, että näitä vastausmuotoja ei voida pitää toisiinsa verrattuna täysin samanlaisina, koska tietokonetta opiskelijat ovat käyttäneet matemaattisen vastaamisen apuna alle vuoden verran, kun taas paperilla he ovat vastanneet jo ensimmäisestä peruskoulun luokasta lähtien matematiikan kokeissa. Siksi olikin tärkeää, että opiskelijoiden oli saatava vastata molemmilla vastausmuodoilla, koska opiskelijoiden matemaattiset vastauskokemukset tietokoneella ovat ajallisesti todella lyhyet verrattuna paperilla vastaamiseen.

Tutkimus on täysin toistettavissa sellaisenaan ainakin MAA5 - Analyyttinen geometria kurssin alkuosan välikokeena niin kauan kun kyseisellä kurssilla opetetaan välikokeessa olleita aiheita. Laajemmin tutkimus on toteutettavissa siten, että valmiiden ratkaisujen arviointia olisi tehtävänannoissa minkä tahansa pitkän matematiikan kurssin väli- tai loppukokeessa. Vaihtoehtona on myös vastata kokonaan tietokoneella eikä käyttää olleenkaan paperilla vastaamista vaihtoehtona, mikä palvelisi lukiossa olevaa nykyistä työskentelykulttuuria enemmmän. Toisaalta välineen vaihto on mahdollista toteuttaa missä tahansa sähköisesti ja paperilla suoritettavassa kokeessa, jos halutaan tutkia vielä enemmän näiden vastausmuotojen välisiä eroja sekä vastausmuodon vaikutuksia tehtyihin ratkaisuihin.

Tutkimusta voisikin laajentaa esimerkiksi tutkimalla sitä, minkä tyyppisiin tehtäviin tai mille lukion matematiikan kursseille valmiiden ratkaisujen arviointi voisi sopia parhaiten. Yleisesti voisi sanoa, että valmiiden ratkaisujen arviointi sopisi parhaiten toisen tai kolmannen vuoden opiskelijoille, koska heillä on jo enemmän kokemusta omien ratkaisujen tuottamisesta sekä niiden perustelemisesta verrattuna ensimmäisen vuoden opiskelijoihin. Pienissä määrin, esimerkiksi yksi tehtävä koko kurssin loppukokeesta, voisi kuitenkin olla valmiin ratkaisun arviointia myös ensimmäisen vuoden matematiikan kursseilla. Jatkotutkimuksen mahdollisuus voisi olla myös siinä, miten valmiiden ratkaisujen arviointi sopisi lyhyen matematiikan kursseille ja aiheisiin. Valmiiden ratkaisujen arvioinnin sopivuutta yläkoulun matematiikkaan voisi myös tutkia.

Lähdeluettelo

Ballew, H. & Cunningham, J.W. (1982). Diagnosing strengths and weaknesses of sixth-grade students in solving word problems. *Journal of Research in Mathematics Education, 13*(3), 202-210.

Bugbee, A.C., Jr. (1996). The equivalence of paper-and-pencil and computer-based testing. *Journal of Reserch on Computing in Education, 28*(3), 282-299.

Clariana, R. & Wallace, P. (2002). Paper-based versus computer-based assessment: key factors associated with the test mode effect. *British Journal of Educational Technology, 33*(5), 593-602.

Eronen, L. (2019). Arviointi ja lukiomatematiikka. *Dimensio, Matemaattis-luonnontieteellinen aikakauslehti, verkkojulkaisu.* Haettu 22.10.2019 osoitteesta https://www.dimensiolehti.fi/3014-2/?fbclid=IwAR1RIk8Ap1MFG5vgwMR6aJ3ulOJHfV3swkTVrfK5fS1UgkTJRccxZf4nO8c

Haapasalo, L. (2012). *Oppiminen, tieto ja ongelmanratkaisu.* Joensuu: Medusa-Software.

Julin, S. & Rautopuro, J. (2016). *Läksyt tekijäänsä opettavat – Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten arviointi 9. vuosiluokalla 2015.* Kansallinen koulutuksen arviointikeskus. Julkaisut 20:2016. Tampere: Juvenes Print – Suomen Yliopistopaino Oy.

Jankko, T.-M. (2015). *Valmiiden ratkaisujen arviointi lukion pitkän matematiikan oppimismenetelmänä.* Pro gradu -tutkielma. Itä-Suomen yliopisto, Joensuu.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Kupari, P., Välijärvi, J., Andersson, L., Arffman, I., Nissinen, K., Puhakka, E. & Vettenranta, J. (2013). *Pisa12 Ensituloksia*. [Helsinki]: Opetus- ja kulttuuriministeriö.

Kurki, L. & Tomperi, T. (2011). *Väittely opetusmenetelmänä: kriittisen ajattelun, argumentaation ja retoriikan taidot käytännössä.* Tampere: niin & näin.

Leppäaho, H. (2007). *Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa. Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi.* Väitöskirja. Jyväskylän yliopisto, Jyväskylä.

Noyes, J. & Garland, K. (2008). Computer- vs. paper-based tasks: Are they equivalent? *Ergonomics, 51*(9), 1352-1375.

Opetus- ja kulttuuriministeriö. (2013). Pisa12 ensituloksia. *Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2013:20.* Haettu 15.3.2019 osoitteesta http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-263-241-8

Opetushallitus. (2015). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015.* Haettu 1.9.2019 osoitteesta https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf

Opetushallitus. (2019a). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019, luonnos.* Haettu 14.3.2019 osoitteesta https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteiden_luonnos_14032019_1.pdf

Opetushallitus. (2019b). *Lops 2021 – lukion opetussuunnitelman perusteet uudistuvat.* Haettu 1.9.2019 osoitteesta https://www.oph.fi/fi/lops-2021-lukion-opetussuunnitelman-perusteet-uudistuvat

Osborne, J., Erduran, S., Simon, S. & Monk, M. (2001). Enhancing the quality of argument in school science. *School Science Review. 82*(301), 63-70.

Yle. (2018). *Matematiikan sähköistyminen herättää kritiikkiä – YTL vastaa useimmiten kysyttyihin kysymyksiin.* Haettu 22.10.2019 osoitteesta https://yle.fi/aihe/artikkeli/2018/02/13/matematiikan-sahkoistyminen-herattaa-kritiikkia-ytl-vastaa-useimmiten

Yle. (2019a). *Yo-kokeet: matematiikka.* Haettu 28.9.2019 osoitteesta https://yle.fi/aihe/artikkeli/2015/12/15/yo-kokeet-matematiikka

Yle. (2019b). *Tekniset apuvälineet ja ajankäyttö mietityttivät ensimmäisessä sähköisessä matematiikan yo-kokeessa.* Haettu 23.10.2019 osoitteesta https://yle.fi/aihe/artikkeli/2019/03/28/tekniset-apuvalineet-ja-ajankaytto-mietityttivat-ensimmaisessa-sahkoisessa

Ylioppilastutkintolautakunta. (2017a). *Vastauksia digitaalisia MAFYKE-kokeita koskevaan kyselyyn 30.3.2017.* Haettu 5.3.2019 osoitteesta https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Sahkoinen_tutkinto/mafyke-ytl-fi.pdf

Ylioppilastutkintolautakunta. (2017b). *Matematiikan koe pitkä oppimäärä 22.3.2017.* Haettu 5.3.2019 osoitteesta https://matta.hut.fi/matta/yoteht/k17p.pdf

Ylioppilastutkintolautakunta. (2017c). *Matematiikan koe pitkä oppimäärä 25.9.2017.* Haettu 5.3.2019 osoitteesta https://matta.hut.fi/matta/yoteht/s17p.pdf

Ylioppilastutkintolautakunta. (2017d). *Matematiikan koe lyhyt oppimäärä 25.9.2019.* Haettu 3.10.2019 osoitteesta https://matta.hut.fi/matta/yoteht/s17l.pdf

Ylioppilastutkintolautakunta. (2018a). *Matematiikan koe pitkä oppimäärä 26.3.2018.* Haettu 5.3.2019 osoitteesta https://matta.hut.fi/matta/yoteht/k18p.pdf

Ylioppilastutkintolautakunta. (2018b). *Matematiikan koe pitkä oppimäärä 1.10.2018.* Haettu 8.5.2019 osoitteesta https://matta.hut.fi/matta/yoteht/s18p.pdf

Ylioppilastutkintolautakunta. (2018c). *Matematiikan digitaalisen kokeen määräykset.* Haettu 5.3.2019 osoitteesta https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Ohjeet/Koekohtaiset/fi_maaraykset_matematiikka_digitaalinen_koe.pdf

Ylioppilastutkintolautakunta. (2019a). *Matematiikan koe pitkä oppimäärä 26.3.2019.* Haettu 8.5.2019 osoitteesta http://yle.fi/plus/abitreenit/2019/kevat/M-fi/index.html

Ylioppilastutkintolautakunta. (2019b). *Matematiikan koe, pitkä oppimäärä 26.3.2019. Hyvän vastauksen piirteitä.* Haettu 8.5.2019 osoitteesta https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Hyv_vast_piirt/FI_2019_K/2019_k_m.pdf

Ylioppilastutkintolautakunta. (2019c). *Matematiikan koe, lyhyt oppimäärä 24.9.2019.* Haettu 3.10.2019 osoitteesta http://yle.fi/plus/abitreenit/2019/syksy/N-fi/index.html

Åkerfeldt, A. (2014). Re-shaping of writing in the digital age. A study of pupils' writing in the different resources. *Nordic Journal of Digital Literacy. 9*(3), 172-193.

Liite A

Kokeen tehtävät ja valmiina annetut ratkaisut

Tehtävä 1

Suora kulkee pisteiden $A(2, -6)$ ja $B(-3,4)$ kautta.

a) Määritä suoran kulmakerroin
b) Onko suora nouseva, laskeva, vaakasuora vai pystysuora, miksi?

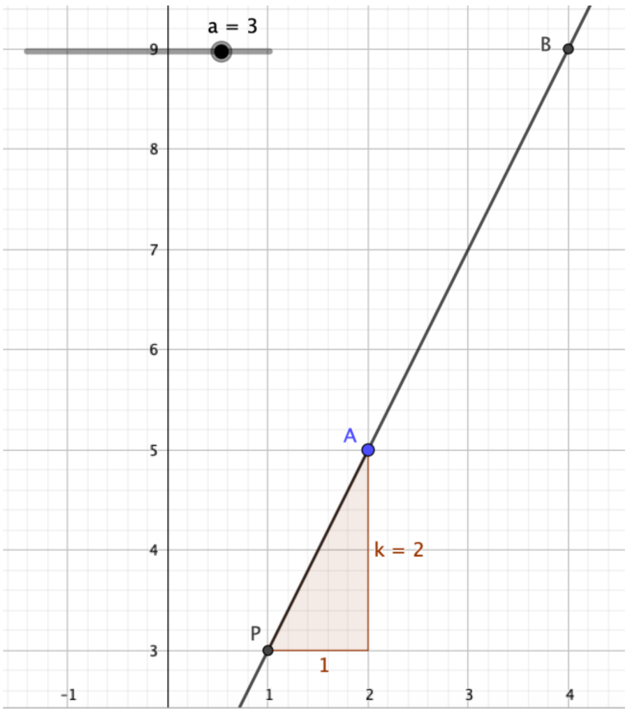
Ratkaisuyritys:

a) Suoran kulmakerroin on $k = \frac{2-(-3)}{-6-4} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$
b) Suora on laskeva, koska suoran kulmakerroin on negatiivinen.

Tehtävä 2

Määritä vakio a siten, että piste $P(1, a)$ on samalla suoralla pisteiden $A(2,5)$ ja $B(4, a^2)$ kanssa. Mitkä ovat pisteiden P ja B koordinaatit.

Ratkaisuyritys:



Kuvan avulla nähdään, että kun $a = 3$, niin pisteet sijaitsevat samalla suoralla. Silloin myös nähdään, että suoran kulmakerroin on 2 ja suoran yhtälö on silloin $y = 2x + 1$.

Kun $a = 3$, niin $P(1,3)$ ja $B(4,9)$.

Tehtävä 3

Mitkä alla olevista suorista, $f - l$, ovat toisiaan vasten kohtisuorassa? Entä mitkä suorat ovat keskenään yhdensuuntaiset?

f:	$2x + y - 5 = 0$
g:	$-2x + 7 = 0$
h:	$2x - 6y + 5 = 0$
i:	$3y - 2 = 0$
j:	$2x + y - 3 = 0$
k:	$4x - 12y - 15 = 0$
l:	$3x + y + 4 = 0$

Ratkaisuyritys:

Muokataan jokaista yhtälöä niin, että saadaan kulmakerroin näkyviin

f: $2x + y - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -2x + 5,\ k_f = -2$

g: $-2x + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{2}\ , k_g = ?$

h: $2x - 6y + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{2x+5}{6}\ , k_h = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

i: $3y - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{2}{3}\ , k_i = ?$

j: $2x + y - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -2x + 3\ , k_j = -2$

k: $4x - 12y - 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{4x-15}{12}\ , k_k = \frac{4}{12}$

l: $3x + y + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -3x - 4$, $k_l = -3$

Suorat ovat yhdensuuntaiset, kun kulmakertoimet ovat yhtä suuret.

Yhdensuuntaiset suorat: f ja j : molempien kulmakerroin on -2

Suorat ovat toisiaan vasten kohtisuorassa, kun niiden kulmakertoimien tulo on -1.

Kohtisuorassa olevat suorat: h ja l : $\frac{1}{3} \cdot -3 = -1$

Tehtävä 4

Olkoon olemassa piste $(3t, 7+t)$ ja suora $5x + 12y - 27t = 0$. Osoita, onko pisteen etäisyys suorasta riippuvainen vakion t arvosta.

Ratkaisuyritys:

Pisteen etäisyys suorasta lasketaan kaavalla $d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Sijoitetaan annetut tiedot yhtälöön.

$$d = \frac{|5 \cdot (7+t) + 12 \cdot 3t + (-27t)|}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{|35 + 5t + 36t - 27t|}{5+12} = \frac{|35 - 14t|}{17}$$

Eli etäisyys riippuu vakion t arvosta, koska se ei supistu pois.

Esimerkiksi, kun $t = 0$, niin etäisyys $d = \frac{|35|}{17} = \frac{35}{17}$.

Liite B

Lupa koevastausten käyttöön

Tällä kokeella on tarkoitus kerätä aineistoa Pro gradu -tutkielmaa varten. Tarkoituksena on tutkia vastausmuotojen välisiä eroja sekä matemaattisia argumentointitaitoja. Yksittäisten opiskelijoiden tiedot eivät tule tutkielmassa esiin eikä henkilötietoja ole mahdollista selvittää vastausten avulla. Tutkimukseen liittyvistä vastauksista poistetaan nimitiedot, eikä tutkimuksen tekijä saa niitä missään vaiheessa tietoonsa. Osallistuminen tutkimukseen ei vaikuta kurssin suoritukseen millään tavalla.

☐ Kyllä, annan luvan käyttää vastauksiani.
☐ Ei, en anna lupaa käyttää vastauksiani.

Kokeessa on neljä tehtävää. Jokaiseen tehtävään on annettu valmis ratkaisu, joka voi olla osittain tai kokonaan oikein tai väärin. Jos ratkaisu on mielestäsi väärin, perustele miksi ja korjaa valmista ratkaisua. Jos ratkaisu on mielestäsi oikein, valinnan voi perustella, mutta se ei ole pakollista.

Liite C

Tehtävien oikeat ratkaisut

Tehtävä 1

Suora kulkee pisteiden $A(2, -6)$ ja $B(-3,4)$ kautta.

a) Määritä suoran kulmakerroin
b) Onko suora nouseva, laskeva, vaakasuora vai pystysuora, miksi?

Oikea ratkaisu:

a) Suoran kulmakerroin on $k = \frac{-6-4}{2-(-3)} = -\frac{10}{5} = -2$
b) Suora on laskeva, koska suoran kulmakerroin on negatiivinen.

Tehtävä 2

Määritä vakio a siten, että piste $P(1, a)$ on samalla suoralla pisteiden $A(2,5)$ ja $B(4, a^2)$ kanssa. Mitkä ovat pisteiden P ja B koordinaatit.

Oikea ratkaisu:

Pisteet P, A ja B ovat samalla suoralla, jos suorien PA ja AB kulmakertoimet ovat samat.

Lasketaan näiden suorien kulmakertoimet:

$k_{PA} = \frac{5-a}{2-1} = \frac{5-a}{1} = 5 - a$ ja $k_{AB} = \frac{a^2-5}{4-2} = \frac{a^2-5}{2}$

Kulmakertoimien on oltava samat, joten muodostetaan saaduista kulmakertoimista yhtälö ja ratkaistaan se.

$\frac{\mathrm{a}^2-5}{2} = 5 - \mathrm{a} \quad || \cdot 2$

$\mathrm{a}^2 - 5 = 10 - 2\mathrm{a}$

$\mathrm{a}^2 + 2\mathrm{a} - 15 = 0$ Ratkaistaan ratkaisukaavalla.

$\mathrm{a} = -5$ tai $\mathrm{a} = 3$.

Kun $\mathrm{a} = -5$, niin $\mathrm{P}(1, -5)$ ja $\mathrm{B}(4, 25)$ ja kun $\mathrm{a} = 3$, niin $\mathrm{P}(1,3)$ ja $\mathrm{B}(4, 9)$.

Tehtävä 3

Mitkä alla olevista suorista, $f - l$, ovat toisiaan vasten kohtisuorassa?

Entä mitkä suorat ovat keskenään yhdensuuntaiset?

f:	$2x + y - 5 = 0$
g:	$-2x + 7 = 0$
h:	$2x - 6y + 5 = 0$
i:	$3y - 2 = 0$
j:	$2x + y - 3 = 0$
k:	$4x - 12y - 15 = 0$
l:	$3x + y + 4 = 0$

Oikea ratkaisu:

Muokataan jokainen yhtälö sellaiseen muotoon, josta nähdään kulmakerroin helpoiten.

f: $2x + y - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -2x + 5, \ k_f = -2$

g: $-2x + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{2}$, pystysuora suora

h: $2x - 6y + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{2x+5}{6}$, $k_h = \frac{1}{3}$

i: $3y - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{2}{3}$, vaakasuora suora j: $2x + y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 3$, $k_j = -2$

k: $4x - 12y - 15 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4x-15}{12}$, $k_k = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

l: $3x + y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = -3x - 4$, $k_l = -3$

Suorat ovat yhdensuuntaiset, kun kulmakertoimet ovat yhtä suuret.

Yhdensuuntaiset suorat:

f ja j : molempien kulmakerroin on -2

k ja h: molempien kulmakerroin on $\frac{1}{3}$

Suorat ovat toisiaan vasten kohtisuorassa, kun niiden kulmakertoimien tulo on -1.

Kohtisuorassa olevat suorat:

g ja i : toinen on pystysuora suora ja toinen vaakasuora suora

k ja l : $\frac{1}{3} \cdot -3 = -1$

h ja l : $\frac{1}{3} \cdot -3 = -1$

Tehtävä 4

Olkoon olemassa piste $(3t, 7 + t)$ ja suora $5x + 12y - 27t = 0$. Osoita, onko pisteen etäisyys suorasta riippuvainen vakion t arvosta.

Oikea ratkaisu:

Pisteen etäisyys suorasta lasketaan kaavalla $d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Sijoitetaan annetut tiedot yhtälöön.

$$d = \frac{|5 \cdot 3t + 12 \cdot (7 + t) + (-27t)|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|15t + 84 + 12t - 27t|}{\sqrt{169}} = \frac{|84|}{\sqrt{169}} = \frac{84}{13}$$

Eli etäisyys ei riipu vakion t arvosta, koska se supistuu pois.