



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND

Murtoluvut alakoulujen matematiikan oppikirjoissa

Juuso Virsunen

Pro gradu -tutkielma
13.12.2023
Fysiikan ja matematiikan laitos
Itä-Suomen yliopisto

| | |
|----------------------|---|
| Etunimi Sukunimi | Juuso Virsunen |
| Itä-Suomen yliopisto | Matemaattisten aineiden aineenopettajan ja luokanopettajan koulutus |
| Työn ohjaaja | Yliopistonlehtori Antti Viholainen |

Tiivistelmä

Murtolukujen oppimisen tutkimusta on suoritettu jo 1920 luvun alkupuolelta, kun Collier Myrtie julkaisi artikkelin murtolukujen kertolaskujen oppimisesta *School science and mathematics* -lehdessä. Murtolukujen osoittautuessa vuosien varrella yhdeksi alakoulun haastavista matematiikan oppisisällöistä, murtolukujen oppimisen tutkimusta suoritetaan laajasti yhä 2020-luvulla. Tulevaisuuden opettajana, murtolukujen oppimisen haastavuus kiinnosti myös minua tutkimusaiheena ja lähdinkin suorittamaan pro gradu -tutkielmani tästä myös minulle tulevaisuudessa merkityksellisestä aihealueesta.

Erilaisia murtolukujen oppimisen tukemisen keinoja on myös esitetty aiemmassa murtolukujen oppimisen tutkimuksessa toimiviksi. Näitä tehokkaiksi todettuja tukemisen keinoja ovat esimerkiksi lukujan hyödyntäminen opetuksessa, murtolukujen erilaisten esitystapojen hyödyntäminen, sekä arkielämän liitokset murtolukukäsitteen ymmärtämiseksi. Erilaisten tuen keinojen monipuolinen hyödyntäminen auttaa myös erilaisia oppijoita ymmärtämään murtolukujen rationaalilukuluonnetta ja abstraktisuutta.

Erilaisten tuen keinojen hyödyntäminen on myös tärkeää käytettävässä oppimateriaalissa. Oppimateriaaleissa erilaisia tuen keinoja voidaan yhä hyödyntää moninaisesti, mutta osa näistä tuen keinoista jää opettajan vastuulle huomioida ja hyödyntää opetuksessaan. Tavoitteena olisi huomioida, että opetuksessa hyödynnettävät tuen keinot ovat monipuolisia ja erilaisia oppijoita huomioonottavia. Tutkimuksessani lähdin tutkimaan Suomen alakoulujen matematiikan oppikirjojen murtolukusisältöjä. Tarkoituksenani oli etsiä tutkitavista kirjasarjoista mitä murtolukujen oppisisältöjä oppikirjat painottavat sisällöissään, sekä minkälaisia tuen keinoja oppikirjat tarjoavat oppilaalle ja opettajalle näissä oppisisällöissä.

Esipuhe

Lukijalle,

Käydessäni peruskoulua, matematiikan oppiminen oli oppikirjan esimerkin läpikäymistä ja tehtävien kilpaa tekemistä tunnista toiseen. Opettaja saattoi joskus kerran kuukaudessa tuoda luokkaan havainnollistavia geometrisia muotoja tai vaa’an, mutta opetus seurasi kuitenkin lukuvuoden alussa aloittamaamme oppikirjaa kuin Raamattua. Tämä ei onneksi enää pidä paikkansa nykyisessä koulumaailmassa, mutta jokin viehätys tuossakin työtavassa aikoinaan oli, saihan se minutkin jotenkin lähtemään opiskelemaan matematiikkaa.

Murtoluvut alakoulujen matematiikan oppikirjoissa on reilun vuoden ajan työstämäni pro gradu - tutkielmani, jonka johdattamana tulevaisuuteni matematiikan opettajan työtehtävissä käyvät pitkän opiskeluaikani jälkeen todeksi. Opiskeluideni nyt päättyessä haluan kiittää työni ohjaajaa Antti Viholaista kaikesta avusta ja monista tapaamisista pro gradu - tutkielmani parissa, hops-ohjaajaani Visa Latvalaa, joka auttoi monesti opintojeni aikatauluttamisessa ja opintojeni lisäajan hakemisessa, sekä Jyrki Mannista ja Mutalan koulua avusta tutkimukseni aineiston keräämisessä. Lisäksi haluan välittää lämpimät kiitokset opiskelukavereilleni, perheelleni ja kaikille lähimmäisilleni tuesta ja kannustuksesta, sekä monista ilon hetkistä opintojeni aikana.

Joensuussa 13.12.2023

Juuso Virsunen

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Johdanto | 1 |
| 2 | Teoreettinen viitekehys | 3 |
| 2.1 | Murtoluvut koulumatematiikassa | 4 |
| 2.1.1 | Murtolukukäsitteen opettaminen | 4 |
| 2.1.2 | Murtolukujen neljä sääntöä | 5 |
| 2.2 | Murtolukujen oppimisen ongelmakohdat | 6 |
| 2.2.1 | Kokonaisluvuista rationaalilukuihin | 6 |
| 2.2.2 | Murtolukujen abstraktisuus | 7 |
| 2.2.3 | Murtolukujen monet merkitykset ja esitystavat | 8 |
| 2.3 | Murtolukujen oppimisen tukeminen | 9 |
| 2.4 | Erilaiset oppijat ja oppimistyyli | 11 |
| 2.5 | Erilaiset oppijat ja murtoluvut | 12 |
| 2.6 | Murtoluvut perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa | 13 |
| 3 | Tutkimuksen toteutus | 15 |
| 3.1 | Aineistonkeruu | 15 |
| 3.2 | Tutkimuksen aineisto | 16 |
| 3.3 | Tutkimuskysymykset | 16 |
| 3.4 | Tutkimusmenetelmän valikoituminen | 17 |
| 3.4.1 | Sisällönanalyysi tutkimuskeinona | 17 |
| 3.4.2 | Sisällönanalyysin sisällöt | 19 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.4.3 | Sisällönanalyysin suorittaminen | 20 |
| 3.4.4 | Sisällönanalyysin tuloksien luokittelu | 20 |
| 4 | Tutkimustulokset | 22 |
| 4.1 | Murtolukujen oppisisällöt oppikirjoissa | 22 |
| 4.1.1 | Milli-kirjasarja | 23 |
| 4.1.2 | Tuhattaituri-kirjasarja | 24 |
| 4.2 | Murtoluvun käsitteen erilaiset esitystavat | 25 |
| 4.2.1 | Milli-kirjasarja | 27 |
| 4.2.2 | Tuhattaituri-kirjasarja | 28 |
| 4.3 | Murtolukujen oppimisen tukemisen keinot oppikirjoissa | 29 |
| 4.3.1 | Milli-kirjasarja | 30 |
| 4.3.2 | Tuhattaituri-kirjasarja | 33 |
| 5 | Pohdinta | 36 |
| 5.1 | Pohdintaa sisällönanalyysin tuloksiin liittyen | 36 |
| 5.1.1 | Murtolukujen sisällöt oppikirjoissa | 36 |
| 5.1.2 | Murtoluvun käsitteen erilaiset esitystavat | 38 |
| 5.1.3 | Murtolukujen oppimisen tukeminen oppikirjoissa | 40 |
| 5.2 | Pohdintaa tutkimuskysymyksiin liittyen | 42 |
| 5.3 | Pohdintaa tutkimuksen onnistumiseen liittyen | 44 |
| 5.4 | Pohdintaa jatkotutkimukseen liittyen | 45 |
| | Lähteet | 47 |

Murtolukujen oppimisen ongelmakohdat ovat hyvin laajalti tutkittuja tutkimusalueita pedagogisessa tutkimuksessa. Murtoluvut ovat matematiikan osa-alue, jossa on huomattu ilmenevän huomattavasti haastavuuksia oppimisessa monista eri syistä. Kokonaisluvuista siirtyminen rationaalilukujen maailmaan on monelle oppilaalle haastava käsite ymmärtää. Murtolukujen abstraktisuus sekä irtonaiset kontekstit arkielämästä ja aiemmista matematiikan sisällöistä voivat myös olla haastavia ongelmakohtia alakoululaisille. Myös nimitäjän ja osoittajien roolien merkityksen ymmärtämisessä voi ilmetä haasteita, sekä osan ja kokonaisen suhteen ymmärtäminen ei välttämättä ole aina selkeää. Nämä monet mahdolliset ongelmakohdat murtolukujen oppimisen yhteydessä haastavat niin opettajan, kuin myös käytettävän opiskelumateriaalin tarjoamaan oppilaalle monipuolisia tuen keinoja murtolukujen oppimisen parissa.

Edellä mainittujen huomioiden motivoimana lähdin tutkimuksessani selvittämään vastaavako Suomen alakoulujen oppikirjat näihin murtolukujen oppimiseen liittyviin haasteisiin riittäväällä tavalla ja mitkä ovat niitä keinoja, joita kirjasarjat hyödyntävät murtolukukäsitteen syntymisen tukemisessa ja murtolukujen oppimisen ongelmakohtien ehkäisemisessä. Erääksi tutkimukseni näkökulmaksi valitsin myös kirjasarjojen tuen keinot erilaisten oppijoiden näkökulmista. Kirjasarjojen tuen keinojen monipuolisuus ja oppimateriaalin erilaiset hyödyntämiskeinot opetuksessa tukevat murtolukukäsitteen ja murtolukujen oppisisältöjen oppimista monipuolisesti erilaisten oppijoiden näkökulmasta.

Tässä tutkimuksessa suoritin vuonna 2016 käyttöönotetun opetussuunnitelman perusteiden mukaisille alakoulujen matematiikan kirjasarjoille laadullisen sisällönanalyysin mur-

tolukujen oppisisältöihin liittyen. Käsittelen tutkimuksessa kirjasarjojen valitsemaa murtolukujen oppisisältöjen painotusta, erilaisia murtolukujen esittämisen keinoja, sekä yleisesti kirjasarjojen tarjoamia oppimisen tuen keinoja murtolukujen oppimisessa. Tutkimuksen tarkoituksena on kartoittaa suomen alakouluissa käytettävien kirjasarjojen ymmärrystä tehtyyn tutkimukseen murtolukujen oppimisen haastavuudesta ja kuinka kirjasarjat vastaavat ja tarjoavat tukea näihin ongelma-kohtiin.

Teoreettinen viitekehys

Murtolukujen oppimista on tutkittu jo jopa vuodesta 1922 lähtien, Collier Myrtien julkaistessa artikkelin murtolukujen kertolaskujen oppimisesta *School science and mathematics* -lehdessä. Laajemmin tutkimusta murtolukujen oppimisen ongelmakohdista on lähdetty suorittamaan kuitenkin 1980-luvulta eteenpäin (Hart, 1981; Behr, Lesh, Post, 1983; Rouche, 1998), ja murtolukujen oppimiseen ja oppimisen tukemiseen liittyviä tutkimuksia suoritetaan yhä edelleen laajasti 2010- ja 2020-luvuilla. (Lortie-Forgues, Tian & Siegler, 2015; Singh, Hoon, Nasir, Cheong, Syazwani, Boon & Hoong, 2020; Wulandari & Faizal, 2022) Murtolukututkimuksessa on yleisesti päädytty tulokseen, että murtolukujen oppiminen on yksi alakoulumatematiikan haastavista oppimissisällöistä, joka pitää sisällään useita oppimiseen liittyviä haasteita.

Tutkimukseni teoreettisessa viitekehyksessä käyn läpi tutkimukselleni merkityksellistä taustatietoa aiempaan murtolukututkimukseen pohjautuen. Esittelen teoreettisessa viitekehyksessä ensimmäisenä murtolukujen oppisisältöjä koulumatematiikassa ja niiden jakautumista kahteen alaluokkaan. Esittelen kappaleessa myös murtolukujen oppimisen ongelmakohtia ja mistä asioista nämä juontavat juurensa, sekä käyn läpi murtolukujen oppimisen tukemisen keinoja ja kuinka nämä tuen keinot vastaavat murtolukujen oppimisen ongelmakohtiin. Käyn läpi myös aiempaa tutkimusta erilaisten oppijoiden tukemisen näkökulmasta murtolukujen parissa tutkimukselleni valikoitunutta näkökulmaa pohjustaen, sekä esittelen peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden asettamia tavoitteita ja sisältöjä murtolukuihin liittyen.

2.1 Murtoluvut koulumatematiikassa

Koulumatematiikassa murtoluvuiksi kutsutaan muodossa $\frac{m}{n}$ esitettäviä rationaalilukuja, jossa luvut m ja n ovat kokonaislukuja. Lukua m kutsutaan osoittajaksi, ja lukua n kutsutaan murtoluvun nimittäjäksi. Koulumatematiikassa murtolukuja voidaan esittää myös sekalukuina esimerkiksi $3\frac{1}{4}$, joissa luvun kokonaisosa ja murtolukuosa ovat esitetty erikseen. Yläkoulun puolella murtolukujen oppisisältöihin tulevat mukaan myös negatiiviset murtoluvut. (OPS, 2014) Tutkimuksessani keskityin murtolukujen oppimiseen vuosiluokilla 3–6, joten tutkimukseni kohdistuu vain positiivisten murtolukujen oppimiseen.

Murtolukujen oppisisällöt alakoulun matematiikassa voidaan jaotella karkeasti kahteen alaluokkaan. Murtolukujen oppisisällöt alkavat murtoluvun käsitteen opettamisella, jonka jälkeen oppisisällöissä siirrytään murtoluvuilla laskemiseen ja muihin murtolukujen ominaisuuksia soveltaviin sisältöalueisiin. Murtolukukäsitteen oppimisella tarkoitetaan oppilaiden kykyä ymmärtää murtolukujen rationaalisuutta, ymmärtää kokonaisen ja murtoluvun suhdetta, sekä tunnistaa murtolukujen osat ja ymmärtää niiden merkitykset.

2.1.1 Murtolukukäsitteen opettaminen

Murtolukukäsitteen opettaminen oppilaille on ensimmäinen askel murtolukujen oppisisällöissä. Aikaisempina lukuvuosina oppilaille on tullut tutuksi matematiikka kokonaisluvuilla, mutta murtoluvut ovat ensimmäinen tilanne koulumatematiikassa, kun oppilaat tutustuvat kokonaisluvuista poikkeaviin numeroihin. Murtolukukäsitteen opettamista lähdetään usein lähestymään kokonaisen suhteesta murtolukuihin, (Empson, 2003) sekä havainnollistamalla esimerkiksi lukujanalla, kuinka murtoluvut sijoittuvat kokonaislukujen väleihin (Barbieri, Rodrigues, Dyson & Jordan, 2019).

Murtolukukäsitteen oppimiseen liittyviä oppisisältöjä matematiikan opetuksessa ovat esimerkiksi murtolukujen ja kokonaislukujen suhteen ymmärtäminen, nimittäjän ja osoittajan oppiminen, murtolukujen suuruusvertailu, sekalukujen oppiminen, sekä laventaminen ja supistaminen. Nämä oppisisällöt sijoittautuvat usein murtolukujen oppisisällöissä opintojen alkuvaiheille, sillä nämä taidot tukevat myöhemmin haastavampiin murtolukujen oppisisältöihin siirryttäessä (Siegler, Fazio, Bailey, Xinlin 2012).

Murtolukukäsitteen hyvä ymmärtäminen on oppilaalle tärkeää, jotta murtolukujen haastavammissa oppisisällöissä opittuja taitoja voidaan hyödyntää käytännössä. Murtolukujen

laskutoimituksiin siirryttäessä oppilailla voi syntyä haasteita hahmottaa laskusääntöjen merkityksiä ja loogisuutta, jos murtolukukäsitteen ymmärtäminen on jäänyt hataralle pohjalle. (Siegler, Fazio, Bailey & Xinlin, 2012; Gabriel, Coché, Szucs, Carette, Rey & Content, 2013) Tästä jatkaen, siirryttäessä murtolukuja soveltaviin tehtävämalleihin ja myöhemmin yläkoulussa yhä haastavampiin murtolukujen sisältöihin, vaaditaan oppilailta hyvää murtolukukäsitteen ymmärtämistä, jotta uusia taitoja voidaan lähteä opiskelemaan. (Siegler, Duncan, Davis-Kean, Duckworth, Claessens, Engel, Susperreguy & Chen, 2012)

2.1.2 Murtolukujen neljä sääntöä

Murtolukukäsitteen opettamisen jälkeen murtolukujen sisällöissä siirrytään koulumatematiikassa murtolukujen aritmeettiseen laskemiseen. Murtolukujen laskennassa oppilaille opetetaan säännöt, kuinka murtolukuja lasketaan yhteen, vähennetään toisistaan, kerrotaan eri kokonais- tai murtoluvuilla, sekä jaetaan kokonais- tai murtoluvuilla. Näitä neljää laskutoimitusta ja niiden mekaanisia sääntöjä kutsutaan murtolukujen oppimisen tutkimuksessa myös neljäksi murtolukujen säännöksi. (Clausen-May, 2005)

Ensimmäinen näistä säännöistä käsittelee murtolukujen yhteenlaskua ja pitää sisällään säännön, että erinimisiä murtolukuja ei voi laskea yhteen, vaan murtoluvuille tulee löytää nimittäjä yhteisten tekijöiden avulla. Nimittäjää muuttaessa tulee muistaa, että myös osoittaja muuttuu laventaessa tai supistaessa. Tämän jälkeen samannimiset murtoluvut voidaan summata lisäämällä osoittajat keskenään.

Toinen murtolukujen säännöistä käsittelee murtolukujen vähennyslaskua. Yhteenlaskusäännön tavoin, erinimisiä murtolukuja ei voida vähentää toisistaan, vaan vähennettävien murtolukujen nimittäjäksi on löydettävä yhteinen nimittäjä. Nimittäjää muuttaessa myös osoittajat muuttuvat edellisen säännön mukaisesti. Lopuksi samannimiset murtoluvut voidaan vähentää toisistaan suorittamalla vähennyslasku osoittajille.

Kolmas murtolukujen sääntö käsittelee kertolaskua murtoluvuilla. Säännön mukaisesti erinimiset murtoluvut voidaan kertoa keskenään, kertomalla osoittajat keskenään, sekä nimittäjät keskenään. Murtolukujen tulo saadaan näillä kahdella laskutoimituksella.

Neljäs murtolukujen sääntö käsittelee murtolukujen jakolaskua. Neljännen säännön mukaan jakolaskun osamäärä on jaettavan murtoluvun ja jakajana toimivan murtoluvun

käänteisluvun tulo. Oppilaille yksinkertaistetusti neuvotaan kääntämään toinen murtoluvuista ”ylösalaisin” ja suorittamalla murtoluvuille kertolasku murtolukujen kolmannen säännön mukaisesti

Oppilaille opetetaan nämä aritmeettiset ratkaisukeinot murtolukujen laskennassa, joita he hyödyntävät läpi kouluelämänsä murtolukujen parissa matemaattisissa tehtävissä. Nämä laskusäännöt auttavat oppilasta ratkomaan yksinkertaisia tehtäviä, jotka vaativat laskutoimituksia murtoluvuilla, mutta säännöt ja niiden tarkka seuraaminen eivät kuitenkaan yksinään auta oppilasta ymmärtämään murtolukuja tai niiden ominaisuuksia aritmeettisen laskennan ulkopuolella. (Clausen-May, 2005)

2.2 Murtolukujen oppimisen ongelmakohdat

Murtolukujen oppimisen ongelmakohdat ovat laajasti tutkittuja murtolukututkimuksen saralla. Monet haasteet juontavat pohjansa murtolukujen rationaalisuudesta johtuvista ominaisuuksista. Murtolukujen abstraktisuus ja monet merkitykset voivat myös osoittautua oppilaita hämmentäviksi tekijöiksi, jotka hankaloittavat murtolukukäsitteen oppimista ja luovat ongelmakohtia edelleen myös muissa murtolukujen oppisisällöissä.

2.2.1 Kokonaisluvuista rationaalilukuihin

Ennen murtolukulaskentaan siirtymistä oppilaat kohtaavat koulumatematiikassa vain kokonaislukuja. Murtoluvut esittävät ensimmäistä kertaa oppilaille mahdollisuuden luvuista kokonaislukujen ulkopuolelta. Murtolukujen ominaisuudet rationaalilukuina vaativat oppilailta uudenlaista ymmärrystä kaikista olemassa olevista luvuista, kun uutena konseptina esitetään luvut, joita tietyille etäisyydelle mahtuukin ääretön määrä. Monet murtolukujen oppimiseen liittyvät ongelmakohdat juontavat juurensa tähän kokonaisluku-biaksiin, josta siirtyminen rationaalilukujen maailmaan voi olla monelle oppilaalle hankalaa. (Ni & Zhao, 2005; Van Hoof, Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2017)

Oppilaat saattavat virheellisesti käsitellä murtolukuja mielessään yhden luvun sijasta kahdena erillisinä kokonaislukuina, ja hyödyntää kokonaislukujen laskennasta opittuja konsepteja murtolukujen parissa. (Avgerinou1 & Tolmie, 2019) Yleinen virhekesitys esimerkiksi murtolukujen yhteenlaskusta murtolukuja juuri oppivalle on lisätä sekä nimittäjät

että osoittajat keskenään virheellisesti. (Hart, 1981) Esimerkiksi oppilas voi laskea $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{8}$, joka ei selvästikään pidä paikkansa.

Usein kohdattava väärinkäsitys murtolukujen ymmärtämisessä juontaa oppilaiden aiemmista opituista konsepteista matematiikassa. Isot luvut pitävät sisällään enemmän numeroita, joka johtaa usein väärinkäsitykseen, että murtoluku, joka sisältää enemmän numeroita tai isomman yksittäisen luvun, olisi itsestään selvyytensä isompi kuin luku joka ”näyttää” pienemmältä. (Empson, 2003) Esimerkiksi oppilas ei välttämättä ymmärrä miksi $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$, tai miksi $\frac{2}{3} > \frac{134}{947}$, koska jälkimmäiset luvut näyttävät isommilta aiempien oppittujen sääntöjen perusteella. Tästä väärinymmärryksestä oppilaat pääsevät irti oppiessaan nimittäjän ja osoittajan merkityksen murtoluvuissa.

2.2.2 Murtolukujen abstraktisuus

Murtolukujen abstraktinen luonne on myös yksi tärkeä syy murtolukujen oppimisen haastavuuteen. Murtoluvut ovat abstrakteja käsitteitä, jotka voivat olla oppilaille hankalasti hahmotettavissa. Kun aiemmin matematiikassa oppilaat ovat käsitelleet ainoastaan kokonaislukuja, joita on helppo hahmottaa konkreettisesti, murtolukuihin siirtyessä käsiteltävien lukujen konkretisoiminen on selkeästi haastavampaa. (Siegler & Pyke, 2013) Murtolukujen yhteydet arkielämän tilanteisiin eivät ole myöskään yhtä helposti erotettavissa oppilaille verrattuna kokonaislukujen moniin yhteyksiin, jolloin opettajan tehtäväksi jää luoda näitä arkielämän linkityksiä esimerkeissään.

Murtolukujen abstraktisuus voi johtaa oppilailla ongelmiin hahmottaa mitä murtoluvun osat kuvaavat ja mitä numeraalista arvoa murtoluku kuvaa. Oppilas ei välttämättä ymmärrä kokonaisen jakamista yhtä suuriin osiin murtoluvuissa, ellei opetuksessa erikseen tätä painoteta, vaan oppilaalle voi syntyä väärinkäsitys, että osat voivat olla minkä kokoisia tahansa. (Tuominen, 2021). Oppilaalle voi olla myös vaikea ymmärtää, että murtoluku voi olla suurempi kuin yksi kokonainen (Ni & Zhou, 2005), murtolukujen käsitteen opetuksen lähtiessä liikkeelle ajatuksesta osana kokonaisesta.

Murtolukujen oppiminen on myös haastavampaa oppimisen näkökulmasta. Abstraktin oppisisällön oppiminen vaatii oppilailta parempia oppimisen taitoja tiedon sisäistämiseen verrattuna kokonaislukujen oppisisältöihin. Murtolukujen syvällisempään ymmärtämiseen oppilaiden tulee oppia murtolukujen proseduraaliset sisällöt, eli kuinka murtoluvut

käyttäytyvät laskutoimituksissa, mutta myös ymmärtää murtolukujen käsitteellistä tietoa, eli mitä murtoluvut ovat ja mitä ne kuvaavat, menettelevällä tasolla. (Siegler & Pyke, 2013)

2.2.3 Murtolukujen monet merkitykset ja esitystavat

Yksi murtolukujen oppimisen ongelmakohdista on murtolukujen moninaisuus ja useat erilaiset merkitykset, jotka saattavat sekoittaa oppilaan käsitystä murtoluvuista. Kieren esitteli vuonna 1976 julkaisemassaan artikkelissa ”*On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers*” neljä erilaista käsitystä ymmärtää murtolukuja, joita voidaan hyödyntää murtolukujen opetuksessa. (Kieren, 1976)

Ensimmäinen näistä on suhdeosuus. Esimerkiksi luokan poikien ja tyttöjen suhde voi olla 4:5, jossa jokaista neljää poikaa kohden luokassa on viisi tyttöä. Tällöin murtoluvuilla ilmaistuna koko luokasta $\frac{4}{9}$ on poikia, ja $\frac{5}{9}$ on tyttöjä. Toinen keino ymmärtää murtolukuja on murtolukujen toiminta operaattorina. Tehtävänä voi olla etsiä $\frac{2}{5}$ jostain tietyistä luvusta x . Tällöin murtoluku toimii kertoimena jollekin luvulle, joka suurentaa tai pienentää alkuperäistä lukua. Murtolukua voidaan hyödyntää tässä tilanteessa ensin kertomalla luku kahdella ja tämän jälkeen jakamalla saatu luku viidellä. Kolmantena murtolukujen ymmärtämisen keinona Kieren esitteli murtolukujen ymmärtämisen jakolaskuina. Tällöin oppilas käsittelee mielessään murtolukuja osamäärän tuloksina, esimerkiksi murtoluku $\frac{3}{4}$ ymmärretään jakolaskuna ”kolme jaettuna neljällä”. Neljäntenä murtolukujen ymmärtämisen keinona esitetään murtolukujen ymmärtäminen määränä kokonaisesta. Tällöin oppilas käsittelee murtolukuja kaksiosaisena numerona, joista nimittäjä määrää kuinka suuriin osiin jokin yksi kokonainen objekti on jaettu ja osoittaja määrää kuinka paljon näitä osia esitetyssä luvussa on. (Kieren, 1976)

Murtolukujen monet merkitykset ovat johtaneet myös laajempaan tutkimukseen murtolukujen ymmärtämisen ja oppimisen keinoista. Suuri osa näistä tutkimuksista hyödyntää aiemmin Kierenin esittämiä malleja, (Brissiaud, 1998; Rouche, 1998; Mamede, Nunes & Bryant, 2005) mutta erilaisia murtolukujen ymmärtämisen keinoja on kuitenkin myös esitelty Kierenin esittämien ymmärtämisen mallien ulkopuolelta. Esimerkiksi Grégoire (2008) esitteli tutkimuksessaan murtolukujen oppimisen koostuvan kolmesta eri ymmärtämisen tasosta. Ensimmäisellä tasolla oppilaat ymmärtävät murtoluvun operaattorina esimerkiksi kakkua jaettaessa osiin. Toisella ymmärtämisen tasolla oppilaat ymmärtävät

jo hieman murtolukujen abstraktista luonnetta ja ymmärtävät, että kaksi erilaista murtolukua voivat merkitä samaa arvoa. Kolmannella ymmärtämisen tasolla oppilaat ymmärtävät murtolukujen numeraalisen merkityksen ja ymmärtävät murtolukujen olevan uudentlaisia kokonaisluvuista eroavia lukuja, joilla on omat laskusääntönsä ja ominaisuutensa.

Murtolukujen monia merkityksiä voidaan myös esittää monin eri keinoin. Murtolukuja voidaan kuvata erilaisilla kuvilla, konkreettisilla malleilla, tai symboleilla. Behr, Lesh, ja Post (1983) esittivät tutkimuksessaan murtolukujen erilaisia esitysmuotoja viiden representaatiosysteemin avulla. Näihin representaatiosysteemeihin kuuluivat arkielämän tilanteet, opetusvälineet, kirjoitetut symbolit ja lauseet, puhuttu kieli ja symbolit, sekä kuvat. (Behr, Lesh, Post, 1983). Nämä ja muut monipuoliset murtolukujen esittämisen keinot voivat ratkaista useita murtolukujen parissa syntyviä ongelmia hyödyntämällä opetuksessa useampaa representaatiosysteemiä (Tuominen, 2021).

Murtolukujen monet merkitykset voivat hämmentää oppilasta ja luoda ongelmakohtia murtolukukäsitteen ymmärtämisessä murtolukujen pariin siirtyvällä oppilaalla. Tutkittuja murtolukujen monipuolisia ymmärtämisen keinoja ja esitystapoja voidaan hyödyntää opetuksessa tukikeinoina murtolukujen oppimiseen ja linkittää näitä erilaisia merkityksiä yhteen luomalla tukevamman perustan murtolukujen oppimiselle.

2.3 Murtolukujen oppimisen tukeminen

Murtolukujen oppimisen tukemiseen liittyen on suoritettu laajasti tutkimusta 2000-luvulla erilaisin näkökulmin. Erilaisia toimivia tukemisen keinoja on esitetty esimerkiksi lukujanaesitysmuotoa opetuksessa hyödyntäen (Barbieri, Rodrigues, Dyson & Jordan, 2019), erilaisia havainnollistavia muotoja hyödyntäen (Behr, Lesh, Post, 1983), tai harvinaisempaa kellokonseptia hyödyntäen (Clausen-May, 2005). Myös monet yleiset oppimisen tukemisen keinot, kuten tehtävien tekeminen, opitun asian kertaaminen, keskustelut, käytännön esimerkit ja toiminnallisuus toimivat myös murtolukujen oppisisällöissä. Nämä monet oppimisen tuen keinot ovat opettajan hyödynnettävissä murtolukujen opetuksen parissa.

Murtolukujen oppimisessa tärkeäksi osatekijäksi nostetaan murtolukututkimuksessa murtolukukäsitteen oppiminen ja teoreettisen tiedon sisäistäminen. Murtolukukäsitteen hyvä

ymmärtäminen tukee myöhemmin murtolukujen oppisisällöissä myös murtolukujen aritmeettisten taitojen oppimista, sekä vastaavasti myös murtolukujen proseduuristen taitojen oppiminen puolestaan tukee myös murtolukukäsitteen oppimista (Siegler & Pyke, 2013; Hansen, Jordan, Rodrigues, 2015).

Murtolukukäsitteen oppimisessa tuen keinoina voidaan hyödyntää murtolukujen erilaisia esitystapoja. Esimerkiksi murtolukujen esittäminen erilaisina kuvina tai konkreettisina mallein numeraalisen esitystavan ohella tukevat murtolukukäsitteen ymmärtämistä. Myös lukujan hyödyntäminen murtolukukäsitteen opetuksessa on todettu erinomaiseksi tuen keinoksi. (Barbieri, Rodrigues, Dyson & Jordan, 2019; Rodrigues et al, 2023) Opetuksessa käytävät sisällöt ja niiden painotukset vaikuttavat myös murtolukukäsitteen ymmärtämiseen. Opetuksessa voidaan käsitellä sisältöjä liittyen murtolukujen suuruusvertailuun, murtolukujen ja kokonaislukujen suhteeseen, sekä nimittäjän ja osoittajan rooliin murtoluvuissa, jotka auttavat oppilasta ymmärtämään murtolukukäsitettä.

Murtolukujen aritmetiikan ja muiden oppisisältöjen oppimisen tukemisessa voidaan hyödyntää myös samanlaisia tuen keinoja kuin murtolukukäsitettä oppiessa. Havainnollistavat kuvat ja konkreettiset mallit auttavat oppilasta ymmärtämään mitä laskutoimituksessa tapahtuu ja mihin esitetyt numeraaliset tulokset perustuvat. (Clausen-May, 2005; Tsung-Lung & Hui-Chuan, 2016) Myös monet yleiset oppimisen tukemisen keinot, kuten kertaaminen, tehtävien tekeminen, eriyttäminen ja muut myös kokonaislukujen parissa toimivat tukemisen keinot toimivat yhä murtolukujen opetuksessa haastavampiin oppisisältöihin siirryessä, uusien opittavien asioiden nojautuessa aiempien opittujen sisältöjen osaamiseen (Siegler, Fazio, Bailey & Xinlin, 2012).

Tutkimuksessani keskittyessäni oppikirjojen keinoihin murtolukujen oppimisen tukemisessa, korostuvat erilaiset murtolukujen esitystavat, havainnollistavat muodot, mahdollisesti murtolukujen sanallistaminen, arkielämän viittaukset ja konseptit erityisesti näistä oppimisen tukemisen keinoista. Oppikirjoissa tuen keinoina voidaan myös hyödyntää opittavien sisältöjen ja sisältöalueiden erilaisia painotuksia sekä sisältöalueiden kertausta. Kirjasarjoihin tutustuessani lähdin etsimään oppikirjoista näitä erilaisia tukemisen keinoja, joita oppikirjat hyödyntävät materiaalissaan.

2.4 Erilaiset oppijat ja oppimistyyli

Oppiminen on kokonaan uuden tiedon oppimista tai jo vanhan tiedon uudelleen oppimista eri tavalla. Jokainen oppija myös on yksilöllinen ja prosessoi saadun tiedon käytön yksilöllisesti. Saadun tiedon omaksuminen ja tallentaminen tapahtuu ihmisillä eriävin tavoin, joka johtaa siihen, että erilaiset oppimisen keinot ja niiden tehokkuus vaihtelevat erilaisilla oppijoilla toisistaan. (Atjonen & Uusikylä, 2005) Nämä tiedot oppimisen yksilöllisyydestä ja eroavaisuudet tiedon omaksumisessa ovat johtaneet laajasti tutkimukseen erilaisista oppijoista ja oppimistyyleistä pedagogisen tutkimuksen saralla.

Erilaisista oppijoista puhuessa, usein viitataan kolmeen tunnettuun oppimistyyliin. Visuaaliseen oppimiseen, audiitiiviseen oppimiseen ja kinesteettiseen oppimiseen. Oppimistyyli on tapa, jonka avulla ihminen hankkii ja käsittelee tietoa. Oppimistyylien monipuolinen hyödyntäminen on tavoiteltava oppimisen keino joka tehostaa oppijan oppimista. Kuitenkin lähtökohtaisesti yksi näistä oppimistyyleistä on oppijalla aina vallitseva, mutta ihminen pystyy käyttämään hyödyksi myös muita oppimistyyliä jollain tasolla. (Dunn, Dunn, & Price, 1984)

Erilaiset oppijat käsitteenä pitää sisällään kuitenkin myös paljon laajemmin erilaisia oppimisen tyyliä ja oppijoita näiden kolmen usein tavatun oppimistyylin lisäksi. Erilaisia oppimisen tyyliä hyödyntävät esimerkiksi Allinsonin ja Hayesin (1996) tutkimuksessaan erottelamat analyttiset ja intuitiiviset ajattelijat, sekä Honeyyn ja Mumfordin (1992) esittelemät aktiiviset, reflektioivat ja pragmaattiset ajattelijat. Erilaisia oppimistyyliä hyödyntävien oppijoiden lisäksi erilaisiin oppijoihin sisällytetään myös oppimishankaluuksia kokevat oppilaat ja erityisen tuen tarpeessa olevat oppilaat. Matematiikan opinnoissa haasteita kokevat oppilaat tarvitsevat erilaisia tuen keinoja oppitunneilla ja oppimateriaaleissa verrattuna matematiikkaa helposti oppivaan oppilaaseen (Namkung & Fuchs, 2019).

Erilaisten oppimistyylien teorioita on myös kritisoitu 2000-luvun puolella, eikä riittäviä todisteita ole pystytty osoittamaan oppimistyylien hyödyntämisen johtavan parempaan oppimistehokkuuteen. (Coffield, Moseley, Hall & Ecclestone, 2004; Willingham, Hughes & Dobolyi, 2014) Oppimistyylien tiedostamisessa on kuitenkin todettu myös hyötyjä. Oppimistyylien avulla voidaan etsiä oppilaille heille mieluisia oppimistyyliä ja auttaa oppilasta etsimään edelleen itselleen mieluisia oppimisen tapoja, jotka motivoivat oppilasta opinnoissa (Husmann & O'Loughlin, 2019).

Erilaisten oppijoiden tukemisessa korostuu tukemisen keinoissa niiden monipuolisuus. Erilaiset oppijat hyötyvät eri tavoin erilaisista tuen keinoista, visuaalisten oppijoiden hyötyessä enemmän havainnollistavista kuvista, kineettisten oppijoiden oppien parhaiten tehtäviä tehden tai toiminnallisilla tuen keinoilla, kun taas auditiiviset oppijat hyötyvät enemmän keskustelusta ja luentomuotoisesta opetuksesta. Tutkiessani murtolukujen tuen keinoja oppikirjasarjoissa myös erilaisten oppijoiden näkökulmasta, korostuu tutkimuksessa etenkin tuen keinojen monipuolisuuden selvittäminen ja analysointi.

2.5 Erilaiset oppijat ja murtoluvut

Murtolukujen opettamista erilaisille oppilaille on käsitelty aiemminkin pedagogisessa tutkimuksessa. Tandi Clausen-May käsittelee kirjassaan *Teaching Maths to Pupils with Different Learning Styles* kappaleessa 5. *Fractions* (2005) murtolukujen opettamista erilaisien oppijoiden näkökulmasta. Clausen-May käsittelee kappaleessa murtolukujen oppimisen neljää sääntöä ja kuinka näiden sääntöjen sokea seuraaminen ei johda murtolukujen ymmärtämiseen, vaan oppimiseen tarvitaan myös muotoja, johdonmukaisuuksia, symboleita ja näiden merkityksen ymmärtämistä.

Murtolukujen ongelmallisuuteen vaikuttaa fakta, että murtolukuja kuvataan usein vain numeraalisesti. Murtolukujen esitystavat ovat moninaisia, mutta virallisen esitystavan mukaisesti opetuksessa nojataan numeraaliseen esitykseen, kun erilaisia esitystapoja on useita erilaisia. Esimerkiksi kolmea neljäsosaa kuvataan vain numeraalisesti $\frac{3}{4}$, kun esitystapana voitaisiin hyödyntää monipuolisesti erilaisia kuvia, sanallista esitystapaa tai konkreettisilla malleilla. Murtolukujen jatkuva esittäminen vain numeraalisessa muodossa on oppimisen puolesta haastavaa erityisesti visuaalisille ja kinesteettisille oppijoille. (Clausen-May, 2005)

Murtolukujen opetuksessa korostuu konseptin ”n n:s osaa koostavat kokonaisen” ymmärtäminen. Kun murtolukuja lähdetään lisäämään ja vähentämään toisistaan, on oppilaan ymmärrettävä, että erikokoiset tai muotoiset murtoluvut on jaettava ensin samankokoisiksi osiksi, jotta laskeminen olisi mahdollista. Kun oppilaat oppivat jakamaan eri muotoisia murtolukuja samankokoisiksi paloiksi, pystyy oppilas myös oikeasti sisäistämään konseptin miksi $\frac{1}{4}$ on pienempi kuin $\frac{1}{3}$. Murtolukujen opettaminen osana jostakin konk-

reettisestä kokonaisuudesta helpottaa murtolukujen oppimista monilla oppijoilla, niin visuaalisten ja kineettisten oppijoiden, mutta myös auditiivisten oppijoiden parissa. (Clausen-May, 2005)

Murtolukujen laskusääntöihin siirtyessä erilaiset oppijat voivat tukeutua edelleen erilaisiin tuen keinoihin. Jotkut oppilaat eivät välttämättä muista tehtävässä käytettävää sääntöä ulkoa, mutta saattavat kuitenkin ymmärtää tehtävän kulun kuvallisesta esityksestä. Murtolukujen kertolaskuissa hyödyllisenä tuen keinona voidaan hyödyntää kertolaskujen esittämistä kuvallisina pinta-alojen laskuina. (Clausen-May, 2005) Tandi Clausen-Mayn kirjassaan esittämä kellokonsepti, sekä yleisemmin hyödynnetty lukujana, toimivat erinomaisesti visuaalisina tukemisen keinoina erilaisten oppijoiden tukemisessa murtolukujen parissa.

Erilaisten oppijoiden näkökulmaa murtolukujen oppimisen parissa on kuitenkin tutkittu melko vähäisesti Tandi Clausen-Mayn julkaisun ulkopuolelta. Yleiset erilaisten oppijoiden ja oppimistyylien huomioinnin keinot opetuksessa ulottuvat kuitenkin myös matematiikan ja murtolukujen oppisisältöjen oppimiseen. Toiminnallisuus, moniaistillisuus, havainnollistavuus, oppiainerajoja ylittävät tehtävämallit, arkielämän liitokset ovat yleisiä opetuksessa hyödynnettäviä tuen keinoja, jotka tukevat erilaisia oppijoita monipuolisesti erilaisin tuen keinoin. Näitä tuen keinoja voidaan hyödyntää myös murtolukujen oppisisällöissä erilaisten oppijoiden oppimisen tukemisessa.

2.6 Murtoluvut perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa

Vuonna 2014 julkaistun perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa murtoluvut huomioidaan jo vuosiluokkien 1–2 matematiikan opetuksessa. Vuosiluokilla 1–2 matematiikan opetuksessa erääksi sisällöksi mainitaan murtolukujen käsitteen pohjustaminen jakamalla kokonainen yhtä suuriin osiin. Vuosiluokilla 3–6 murtoluvut tulevat mukaan opitaviin sisältöihin laajemmin. Sisältöalue S2 Luvut ja laskutoimitukset pitää sisällään murtolukujen käsitteen oppimisen ja harjoittelun murtolukujen peruslaskutoimituksilla eri tilanteissa. Tämän lisäksi murtolukujen, desimaalilukujen ja prosenttilukujen yhteyksien hyödyntäminen kuuluu tähän sisältöalueeseen S2. (OPS, 2014)

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet toimivat hyvin karkeana suunnannäyttäjänä murtolukujen opetuksen sisällöille. Murtolukujen sisällöt vuosiluokkien 3–6 matematiikan opetuksessa ovat mittavat ja löytyvät jatkuvasti vuosittain oppitunneilla käsiteltävistä sisältöalueista läpi näiden alakoulun vuosiluokkien, vaikka perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet mainitsevatkin nämä sisällöt vain muutamassa lauseessa. (OPS, 2014) Nämä karkeat linjaukset murtolukujen oppisisällöissä toimivat mielenkiintoisena lähtökohtana tutkimukselleni. Oppikirjasarjoja ei ole pakotettu seuraamaan tarkkoja asetuksia murtolukujen opetuksessa, vaan kirjasarjoilla on vapaus valita omasta mielestään tehokkaat keinot lähestyä näitä opetettavia sisältöjä. Kirjasarjojen mahdolliset eroavaisuudet voivat olla tällöin hyvinkin suuria, mutta vastaavasti myös samankaltaisuus opetuksen tuen keinoissa ja sisältöalueiden painotuksissa voisivat johtaa mielenkiintoiseen analyysiin miksi näihin tuen keinoihin on päädytty kirjasarjoissa.

Tässä luvussa käsitellään tutkimuksen toteutusta tarkemmin. Tutkimuksessa suoritin alakoulun oppikirjoille sisällönanalyysin murtolukuja sisältäviin kappaleisiin ja kohdensin tarkoilla rajauksilla tutkimukseni etsimään kirjoista asettamiini tutkimuskysymyksiin vastauksia. Tässä kappaleessa käyn läpi tutkimuksen aineistonkeruun, valikoituneen aineiston, asettamani tutkimuskysymykset sekä tarkat ehdot, joiden perusteella lähdin suorittamaan sisällönanalyysiä tutkimukseen valikoituneelle aineistolle.

3.1 Aineistonkeruu

Valitsin tutkimusaineistokseni rajaukseksi alakoulun 3–6 luokkien vuonna 2014 julkaistun ja 2016 käyttöön otetun opetussuunnitelman (OPS, 2014) mukaiset matematiikan kirjasarjat, joista kahteen kirjasarjaan pääsin laajemmin käsiksi. Sanomapro-nettisivujen kautta pääsin käsiksi Milli-kirjasarjaan, josta etsin ne Milli-kirjasarjan oppikirjat, jotka käsittelevät murtolukuja. Toiseen kirjasarjaan pääsin käsiksi Joensuun Mutalan koulun kirjavarastoa hyödyntäen. Mutalan koululla käytössä oli vuoden 2016 opetussuunnitelman mukainen Tuhattaituri-kirjasarja, josta sain lainaan kyseisen kirjasarjan oppikirjat, joiden oppisisältöihin kuuluivat murtoluvut.

Päätin rajata aineistoni vuonna 2016 käyttöön otetun opetussuunnitelman mukaisiin kirjoihin, vaikka olisin päässyt käsiksi vanhempiinkin oppikirjoihin näistä kirjasarjoista. Rajauksen tarkoituksena oli käsitellä kaikkein uusinta ja ajankohtaisinta kirjasarjojen näkemystä murtolukujen oppimisesta, sekä tarkastella kirjasarjojen etenemistä murtolukujen oppisisältöjen parissa oppilaiden lukuvuosien varrella. Tämän takia päätin myös rajata

aineistoni kokonaisuusiin kirjasarjoihin yksittäisten oppikirjojen sijaan. Aineistonkeruu-vaiheessa pääsin käsiksi myös esimerkiksi Tuuma-kirjasarjan oppivuoden 3 kirjaan, joka piti sisällään kappaleen murtoluvuista. Päätin kuitenkin jättää tämän oppikirjan sisällönanalyysin ulkopuolelle ja keskittyä kirjasarjoihin, joiden sisältöä pääsin analysoimaan koko alakoulun murtolukuopetuksen saralta.

3.2 Tutkimuksen aineisto

Rajattuani ulos keräämästäni aineistosta kirjat, joissa en päässyt käsittelemään kirjasarjaa koko alakoulun ajalta, aineistoksi tutkimukselle valikoitui kokonaisuudessaan kaksi kirjasarjaa, Milli ja Tuhattaituri. Milli-kirjasarjassa oppikirjoja, jotka pitivät sisällään murtolukuihin keskittyviä kappaleita, oli neljä kappaletta, yksi jokaiselle lukuvuodelle 3–6. Samoin myös Tuhattaituri-kirjasarjassa tarkasteltaviksi kirjoiksi valikoitui 4 oppikirjaa, yksi jokaiselle lukuvuodelle 3–6.

Tutkimuksen aineiston rajaaminen näihin kirjasarjoihin perustui tutkimukseni tavoitteisiin. Tutkimuksen tarkoituksena oli tutkia alakoulun oppikirjojen erilaisia keinoja tukea murtolukujen oppimista ja murtolukukäsitteen kehittymistä. Sisällönanalyysissä etsimäni sisällöt ja tutkimukselle asettamani tutkimuskysymykset käsittelevät kirjasarjojen oppimisen tukemisen keinoja läpi koko alakoulun murtolukujen oppisisältöjen. Tällöin aineiston käsittely kirjasarjan jokaisen lukuvuoden oppikirjan osalta antaa paremman käsityksen kirjasarjan murtolukujen oppisisällöistä, oppimisen tukemisen keinoista ja tavoitteista murtolukujen oppimisen parissa. Yksittäistä oppikirjaa oppikirjasarjan ulkopuolelta analysoidessa, voi analyysistä jäädä käsittelemättä tärkeitä konteksteja oppikirjassa tehtyihin päätöksiin murtolukujen oppisisällöissä tai tuen keinoissa koko kirjasarjan näkökulmasta.

3.3 Tutkimuskysymykset

Tutkimukseni tarkoituksena oli tarkastella murtolukujen oppimisen tukemista alakoulujen oppikirjoissa. Valitsin erääksi suureksi tutkimuksen sisällöksi murtolukujen oppimisen tukeminen erilaisten oppijoiden näkökulmasta. Erilaiset oppijat tarvitsevat erilaisia tukemisen keinoja oppimisessa ja tarkoitukseni oli tutkia oppikirjojen erilaisten tukkeiden monipuolisuutta ja arvioida, tarjoavatko nämä tuen keinot tarpeeksi monipuolisia

tuen keinoja huomioiden erilaiset oppijat, vai jäävätkö tuen keinot vain hyvin yksipuoliksi ja keskittyvät vain johonkin oppimistyyliin.

Taustatutkimuksen ja tutkimukseen valikoituneen aineiston perusteella asetin tutkimuskysymyksiksi seuraavat kysymykset:

1. Millä eri keinoilla alakoulujen oppikirjat tukevat murtolukujen oppimista ja murtolukukäsitteen kehittymistä?
2. Millä eri tavoilla alakoulujen oppikirjat ottavat huomioon erilaiset oppijat murtolukujen oppimateriaaleissaan?

Asettamani tutkimuskysymykset ohjasivat minua myös valitsemaan tutkimuskeinoksi laadullisen sisällönanalyysin. (Sarajärvi & Tuomi, 2018) Tutkimuskysymykseni tutkimukselleni ovat hyvin avoimia ja laadullisia, joten tutkimuksen tuloksia olisi merkityksellisempää myös tutkia laadullisen sisällönanalyysin lähtökohdin.

3.4 Tutkimusmenetelmän valikoituminen

Päätin lähteä tutkimaan asettamiani tutkimuskysymyksiä suorittamalla tutkimukseen valikoituneelle aineistolle sisällönanalyysin, jossa tarkoitukseni on etsiä asettamilleni tutkimuskysymyksille merkityksellisiä sisältöjä oppikirjoista. Tärkeää oli lähestyä tutkittavaa aineistoa objektiivisesti ilman ennakkoluuloja ja avoimesti analysoida oppikirjoja asettamieni tutkimuskysymysten näkökulmasta. Tutkimuksessani kiinnitin huomiota myös sisällönanalyysin toistettavuuteen ja luotettavuuteen ja pyrin dokumentoimaan sisällönanalyysin työskentelyvaiheet selkeästi ja perustellusti.

3.4.1 Sisällönanalyysi tutkimuskeinona

Sisällönanalyysi on menetelmä tutkia tutkittavaa aineistoa systemaattisesti ja tavoitteellisesti tutkimuksessa asetetun näkökulman mukaisesti. Sisällönanalyysin perustana toimii tutkimuskysymyksiä ja tavoitteiden tarkka asettaminen, jotka ohjaavat tutkimusta ja analyysia tarkasti rajattuna eteenpäin. Aineisto valitaan tarkasti rajaten, jonka jälkeen aineistolle suoritetaan analyysi, jossa aineistosta etsitään asetettuja tavoitteita, merkityksellisiä teemoja tai yhteyksiä. Aineiston suuruus voi vaihdella sisällönanalyysissä muutamasta dokumenteista suurin tietokantoihin. Sisällönanalyysin tavoitteena on tuottaa ana-

lysoidusta materiaalista tulosten raportointi, joka esittelee analyysistä löydettyjä vastauksia asetettuihin tutkimuskysymyksiin, yhteyksiä ja merkityksellisiä teemoja. (Sarajärvi & Tuomi, 2018)

Laadullinen ja määrällinen sisällönanalyysi eroavat toisistaan sisällönanalyysin työmalteina, joissa aiemmin mainitussa keskitytään aineiston syvälliseen ymmärtämiseen ja merkitysten etsimiseen tutkimusaineistosta. Tutkimuksessa aineistoa käsitellään ensisijaisesti sisältöjohteisesti, jossa tutkittavat sisällöt ja kategorisoinnit johdetaan aineistosta. Laadullista sisällönanalyysia hyödynnetään usein, kun tutkimusaineiston sisällöt ja etsittävät tulokset ei ole määrällisesti esitettävissä, vaan etsittävien sisältöjen käsittelyyn on merkityksellisempää lähestyä laadullisesti tai vahvasti aineistolähtöisesti. Laadullisen sisällönanalyysin tulokset ovat myös usein laadullisia, eivätkä mahdollisesti ollenkaan numeraalisesti esitettävissä tai kategorisoitavissa. Määrällisessä sisällönanalyysissä tutkimus keskittyy tutkimusaineiston numeeriseen analyysiin ja tulosten analysointiin tilastollisin menetelmin. Tutkimusainestoa analysoidaan ennalta määritellyissä kategorioissa systemaattisesti, jolloin myös tuloksista saadaan numeraalisesti esitettäviä määrällisiä tuloksia. (Sarajärvi & Tuomi, 2018)

Sisällönanalyysissä analysoitavia sisältöjä voidaan myös lähestyä erilaisin tavoin. Aineistolähtöisessä sisällönanalyysissä analysoitavat sisällöt valitaan aineistolähtöisesti ja etsittävät teemat ja teemat eivät perustu ennalta määrättyihin teoreettisiin raameihin. Vastavasti teorialähtöisessä sisällönanalyysissä tutkimus perustuu aiempiin teoreettisiin raameihin, joita hyödynnetään aineiston analysoinnissa ja läpikäynnissä. Aineistolähtöisessä sisällönanalyysissä korostuvat aineiston monipuolisuus ja analysoinnin avoimuus, kun taas teorialähtöisessä sisällönanalyysissä tarkat teoreettiset viitekehykset ja aiemmat tutkimusteoriat tukevat tehokkaasti aineiston analyttistä arviointia ja tulosten tulkintaa aiempaan teoriaan pohjautuen. (Sarajärvi & Tuomi, 2018)

Tutkimuksessani valitsin tutkimuskeinokseni aineistolähtöisen laadullisen sisällönanalyysin, sillä tutkimuksen tavoitteenani on syvällisemmin ymmärtää oppikirjojen keinoja toimia murtolukujen oppimista tukevin oppimateriaaleina. Asettamani tutkimuskysymykset tutkimukselle ohjasivat valitsemaan tutkimuskeinokseni laadullisen sisällönanalyysin määrällisen sijaan. Tästä jatkaen, valitsin laadulliset sisältöalueet tutkimukselleni aineistolähtöisesti, jotta analyysissä pystyin paremmin ymmärtämään oppikirjojen oppikokonaisuuksia, painotuspisteitä ja oppimisen tukemisen keinoja avoimemmin ja jous-

vammin. Aineistolähtöisellä sisällönanalyysillä myös pystyin varmistamaan, että sisällönanalyysissä etsittävät teemat ja sisällöt löytyvät varmasti tutkimukseeni valikoituneesta aineistosta ja analyysistä tulee tällöin myös tutkimukselleni merkityksellisempää.

3.4.2 Sisällönanalyysin sisällöt

Taustatutkimuksen ja asettamani tutkimuskysymyksiä perusteella lähdin tutustumaan valikoituneeseen aineistoon, tarkoitukseni etsiä tutkimukselle sopivia aineistolähtöisiä sisältöjä sisällönanalyysia varten. Tutkimusaineistoon perusteellisen tutustumisen jälkeen lähdin etsimään kirjasarjoista seuraavia sisältöjä:

1. Mitä eri murtolukujen sisältöjä kirjasarjat pitävät sisällään?
2. Millä eri tavoilla murtoluvun käsite esitetään kirjasarjoissa ja kuinka nämä esitystavat muuttuvat kirjasarjoissa ylemmille koululuokille siirryttäessä?
3. Millä eri tavoilla kirjasarjat tukevat murtolukukäsitteen kehittymistä ja ehkäisevät yleisiä murtolukujen oppimisen ongelmakohtia?

Sisällönanalyysilleni asettamani etsittävät kysymykset ja niiden sisällöt eivät nojanneet vahvasti tiettyyn pohjatutkimukseen tai teoriaan, vaan etsittävät sisällöt valikoituivat etenkin tutkittavan materiaalin pohjalta ja kirjoista löytyvien sisältöjen perusteella. Tällä lähestymistavalla pystyin käsittelemään sisällönanalyysissäni opetusmateriaalista löytyneitä sisältöjä ja suorittamaan näille varmasti löytyville sisällöille analyysin. Vaihtoehtoisesti olisin voinut valita suorittaa valikoituneelle aineistolle teorialähtöisen sisällönanalyysin, jossa keksittyisin ensisijaisesti aikaisemmassa tutkimuksessa esitettyihin sisältöihin, joita kirjoista ei mahdollisesti löytynytäkään.

Asettamistani kysymyksistä kaksi ensimmäistä käsittelevät tarkalla rajauksella oppikirjoista löytyviä sisältöalueita ja murtolukujen esitystapoja, jotka pitävät sisällään myös kolmannelle asettamilleni kysymyksille merkityksellisiä tuloksia. Murtolukujen sisältöalueiden erilaiset painotukset ja sisältöalueiden kertaaminen ovat eräitä oppimisen tukemisen keinoja, joita kirjasarjat voivat oppikirjoissaan hyödyntää. Myös erilaisten murtoluvun esitystapojen hyödyntäminen ja niiden hyödyntämisen mahdolliset erilaiset painotukset murtolukujen oppisisällöissä tulee huomioida myös kolmannen asettamani kysymyksen tuloksia analysoidessa.

3.4.3 Sisällönanalyysin suorittaminen

Suoritin sisällönanalyysin käymällä läpi jokaisen oppikirjan asettamani sisällönanalyysin kysymysten näkökulmasta, etsien oppikirjan murtolukukappaleiden opetusnurkasta asettamani sisältöjä. Lähdin tutustumaan oppikirjoihin lukuvuosi-kohtaisesti ja vertasin kirjasarjojen eroavaisuuksia etsittävässä sisällöissä oppikirjakohtaisesti. Kirjasin ylös sisällönanalyysissä etsittäviä sisältöjä oppikirjakohtaisesti, jokaisesta kuudesta oppikirjasta analyttisesti, jotka esittelen tulokappaleessa kirja kerrallaan.

Tulosten keräämisen jälkeen lähdin etsimään löydetyille sisällöille sopivia tulosten luokittelutapoja, joiden määräytymistä käsitellen tarkemmin seuraavassa kappaleessa. Pysin esittämään tulokset myös helposti hahmotettavina kuvaajina tulokappaleessani tekstikappaleiden läpikäymisen lisäksi.

Tulokappaleessa listasin sisällönanalyysissä löydettyjä sisältöjä analyttisesti tarjoamalla kuitenkin myös tarvittavan kontekstin löydettyjen tulosten merkityksellisyydelle. Tarkemman tulosten pohdinnan suoritin kuitenkin tarkoituksellisesti pohdintakappaleessani. Sisällönanalyysin tulosten tulkinnassa on tärkeää lähestyä saatuja tuloksia tutkimuskysymysten kontekstista. Sisällönanalyysin luotettavuuden ja toistettavuuden kannalta on myös tärkeä tulkinnassa lähteä tulkitsemaan saatuja tuloksia varovaisesti ja varmistuttava, ettei saaduista tuloksista lähdetä tekemään liian kaukaa haettuja johtopäätöksiä ilman riittäviä perusteluja. Pysin pohdintakappaleessani tukemaan saamani johtopäätökset analyysin tuloksista aikaisempaan murtolukututkimukseen, sekä käsittelemään tutkimukseni merkityksellisyyttä tutkittavaa aineistoa hyödyntäville ja kehittäville tahoille. Tutkimukseni pohdintakappaleessa käsitelin myös tulevaisuuden kuvia murtolukututkimuksen alalla, ja tämän tutkimuksen tuomia näkökulmia tulevaisuuden tutkimukseen liittyen.

3.4.4 Sisällönanalyysin tuloksien luokittelu

Tulosten luokittelussa parhaaksi tavaksi osoittautui myös käsitellä etsittäviä sisältöjä lukuvuosikohtaisesti eri kirjasarjoissa. Luokittelin tulokset etsittävien sisältöjen osalta ensin Milli-oppikirjoissa oppikirjoissa 3–6 ja tämän jälkeen Tuhattaituri-oppikirjoissa 3–6. Tulosten luokittelussa tarkoituksenani oli esitellä tulokset siten, että molempien kirjasarjojen eroavaisuudet lukuvuositasolla, sekä kirjasarjan kokonaiskuvassa tulevat esille. Hyväksi esitystavaksi osoittautui kahden ensimmäisen etsittävät sisällön kohdalla tulosten taulukointi, johon etsittävät sisällöt ovat eroteltu kirjasarja- sekä lukuvuosikohtaisesti.

Kolmannessa asettamassani kysymyksessä taulukointi ei osoittautunut kuitenkaan tarkoituksenmukaisimmaksi esitystavaksi. Tulokappaleessa käyn läpi kolmannen kappaleen sisältöjä läpi kirjasarjakohtaisesti, enkä erotellut erilaisten tuen keinoja kirjasarjoissa edelleen lukuvuosisikohtaisesti. Erilaiset oppimisen tukemisen keinot osoittautuivat etsittävänsä sisältönä hyvin laadullisiksi tuloksiksi, joten paremmaksi tulosten esitystavaksi osoittautui Venn-diagrammi löydetyistä oppimisen tukemisen keinoista kirjasarja-kohtaisesti, joka esittää kirjasarjojen tuen keinojen samankaltaisuuden ja löydetyt eroavaisuudet selkeästi.

Tässä kappaleessa käydään läpi tutkimuksessa suoritettujen sisällönanalyysien tuloksia. Olen taulukoinut löydetyt sisällönanalyysien sisällöt kirjasarja- sekä kirjakohtaisesti etsittävä sisältö kerrallaan. Kappaleessa käyn läpi myös saatuja tutkimustuloksia kirjakohtaisesti avaten esittämiäni taulukointeja ja kuvaajia löydetyistä tuloksista.

4.1 Murtolukujen oppisisällöt oppikirjoissa

Tutkimukseni tarkoituksena oli käsitellä kirjasarjojen oppimisen tuen keinoja murtolukujen parissa, joten tarkoituksenmukaiseksi osoittautui myös tutkia, mitä murtolukujen sisältöalueita oppikirjat tarkemmin pitävät sisällään ja kuinka nämä sisältöalueet jakautuvat eri lukuvuosien varrelle kirjasarjoissa. Kirjasarjojen sisällöt pyrkivät vastaamaan peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa esitettyihin tavoitteisiin murtolukuihin liittyen, mutta suunnitelman asettamat tavoitteet ovat hyvin avoimia eivätkä rajaa tarkalleen min-kälaisin keinoin tai sisältöaluein asetettuihin murtolukujen oppimisen tavoitteisiin tulisi päästä. Taustatutkimuksen perusteella tutkimuksen oletuksena oli, että kirjasarjojen murtolukujen sisältöalueet vastaavat hyvin pitkälti toisiaan, mutta eroavaisuuksia voisi löytyä joidenkin sisältöjen asetetusta ajankohdasta kirjasarjassa, sisältöalueiden painotuksista, tai mahdollisissa ylimääräisissä sisällöissä murtolukujen saralla, jotka tukevat murtolukujen syvällisempää ymmärtämistä.

| | Kokonai- sesta murtoluv. | Murtoluv. konsepti | Suuruus- vertailua | Sekaluku | Yht- ja väh.laskut samann. | yht- ja väh.laskut sekaluvuil. | Lavent. ja supistam. | Kertolasku | Osan laskemin. luvusta | Yht- ja väh.lasku erininim. | Jakolaskut murtoluv. | Laskujär- jestys | Pituuslas- kuja |
|-----------------|--------------------------------|-----------------------|-----------------------|----------|----------------------------------|--------------------------------------|-------------------------|------------|------------------------------|-----------------------------------|-------------------------|---------------------|--------------------|
| Milli 3b | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ |
| Tuhattaituri 3b | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ |
| Milli 4b | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ |
| Tuhattaituri 4b | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ | ✓ | ✗ | ✗ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ |
| Milli 5b | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ |
| Tuhattaituri 5b | ✓ | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ |
| Milli 6b | ✓ | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ | ✗ |
| Tuhattaituri 6b | ✓ | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ |

Kuva 1: Murtolukujen oppisisällöt oppikirjakohtaisesti. Vihreällä kuvataan oppikirjassa löytyviä oppisisältöjä. Keltainen merkintä tarkoittaa, että etsityt sisällöt esiintyivät oppikirjassa oheissisältönä, mutta niille ei ole varattu omaa sisältökappaletta kirjasta. Punainen merkintä tarkoittaa, ettei kyseistä etsittyä sisältöä löytynyt oppikirjasta

4.1.1 Milli-kirjasarja

Milli-kirjasarjassa murtolukujen sisällöt alkavat kolmannen luokan oppikirjassa opetus suunnitelman asettamien sisältöjen mukaisesti. Kolmannen lukuvuoden oppikirjassa murtolukujen sisältöihin kuuluvat murtoluvun käsite ja ominaisuudet, suuruusvertailun murtolukujen välillä, sekaluvut sekä yhteen- ja vähennyslasku samannimisillä murtolu vuilla.

Neljännän lukuvuoden oppikirjassa murtolukujen sisältöalueet pitävät edelleen sisällään murtolukujen ja sekalukujen ominaisuudet, sekä yhteen- ja vähennyslaskut samannimi sillä murtoluvuilla. Uusina sisältöinä mukaan tulevat yhteen- ja vähennyslaskut sekalu vuilla, joiden sisällöissä käsitellään myös murtolukujen muuttamista sekaluvuiksi.

Viidennen lukuvuoden oppikirjoissa jo oppilaille tuttuja sisältöjä käydään läpi murtolukujen ja sekalukujen ominaisuuksien ja niiden muunnoksien parissa, sekä samannimisten murtolukujen ja sekalukujen yhteen- ja vähennyslaskukappaleissa. Uusina sisältöinä oppikirjassa ovat mukana laventaminen ja supistaminen, murtolukujen kertominen luonnollisella luvulla, sekä osan laskeminen luvusta.

Kuudennen vuoden oppikirjoissa tuttuja oppisisältöjä ovat sekalukujen ja murtolukujen muunnokset, laventaminen ja supistaminen, samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku, murtoluvun kertominen luonnollisella luvulla sekä osan laskeminen luvusta. Uusina sisältöinä mukana ovat erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku, sekä murtolukujen jakaminen kokonaisluvulla.

Milli-kirjasarjassa sisällöt etenevät luonnollisesti murtolukujen perusteista haastavampiin sisältöihin oppivuosien varrella. Suurimman huomion sisältöjen jakamisesta eri vuosille herätti erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskun sisältöjen asettaminen vasta kuudennelle lukuvuodelle, vaikka supistamisen ja laventamisen sisällöt tulevat oppilaille tutuksi jo viidentenä lukuvuonna. Kirjasarjan ensimmäisten vuosien sisällöt tukevat oppilaan murtolukukäsitteen kehittymistä vahvasti. Murtolukukäsitettä käsitellään kokonaisen ja murtoluvun suhteena, sekä murtoluvun koostumista osoittajasta ja nimittäjästä. Tärkeä aikainen sisältö *suuruusvertailu* myös auttaa oppilasta ymmärtämään osoittajan ja nimittäjän roolit murtoluvussa. Aikaiset sekalukujen sisällöt tukevat myös oppilaan kokonaislukujen ja murtolukujen suhteen ymmärtämistä.

4.1.2 Tuhattaituri-kirjasarja

Tuhattaituri-kirjasarjassa murtolukujen sisältöjen ajankohdat sekä laajuus eroavat hieman Milli-kirjasarjan sisällöistä. Murtolukujen sisällöt alkavat kuten Milli-kirjasarjassa kolmannen lukuvuoden oppikirjoissa. Kolmantena lukuvuonna murtolukujen oppisisällöissä keskitytään murtoluvun konseptiin, kokonaisen ja murtoluvun yhteyteen, murtolukujen suuruusvertailuun sekä yhteen- ja vähennyslaskuun murtoluvuilla.

Neljännän luokan kirjassa sisältöihin kuuluvat edelleen murtoluvun ja kokonaisluvun yhteys, sekä yhteen- ja vähennyslaskut samannimisillä murtoluvuilla. Uusia murtolukujen sisältöjä ovat supistaminen ja laventaminen, sekaluku, sekä erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku.

Viidennen lukuvuoden kirjasarjassa murtolukujen sisällöt pitävät sisällään edelleen murtolukujen ja sekalukujen ominaisuudet, supistamisen ja laventamisen ja yhteen- ja vähennyslaskut saman- ja erinimisillä murtoluvuilla. Uusina sisältöinä viidennen lukuvuoden kirjassa otetaan käsittelyyn murtolukujen kertominen kokonaisluvulla, laskujärjestys, osan ottaminen luvusta, sekä pituuslaskut murtolukuja hyödyntäen.

Kuudennen lukuvuoden oppikirjassa sisältöihin kuuluvat edelleen sekalukujen ja murtolukujen ominaisuudet, supistaminen ja laventaminen, yhteen ja vähennyslaskut saman- ja erinimisillä murtoluvuilla sekä murtoluvun kertominen kokonaisluvulla. Uusina sisältöinä kirjassa ovat mukana laskut sekaluvuilla, joita ei edellisten vuosien oppikirjat sisältäneet, sekä murtoluvun jakaminen kokonaisluvulla.

Tuhattaituri-kirjasarjassa myös murtolukujen sisältöalueet etenevät luonnollisesti murtolukujen perusteista haastavampiin sisältöalueisiin lukuvuosien varrella. Kirjasarja käsittelee ensimmäisinä sisältöinä kokonaisen ja murtolukujen yhteyttä useamman kappaleen ajan, joka auttaa oppilasta ymmärtämään murtolukujen konseptia hitaammalla etenemisvauhdilla. Murtoluvun ominaisuuksia käsitellään myös perusteellisesti, nimittäjän ja osoittajan roolia murtoluvussa esitellen, sekä tärkeä sisältöalue *suuruusvertailua* löytyy myös Tuhattaituri-kirjasarjasta, joka ehkäisee väärin mielikuvien syntymistä murtolukujen suuruuteen liittyen. Jo neljännen lukuvuoden oppikirjassa murtolukujen sisältöihin otetaan mukaan supistaminen ja laventaminen, sekä erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskut. Näitä haastavampia sisältöjä käsitellään myös tulevana vuosina ja näiden sisältöalueiden aikainen sisällyttäminen tukee toisaalta sisältöjen kertaamalla oppimista tulevana lukuvuosina, mutta voi olla hyvinkin haastava sisältö jo neljännelle lukuvuodelle. Tuhattaituri-kirjasarja ottaa toisaalta yllättävän myöhään käsittelyyn sekaluvut ja sekaluvuilla laskemisen, jälkimmäisen esiintyessä sisällöissä vasta kuudennen lukuvuoden oppikirjassa. Nämä sisällöt tukisivat oppilaan käsitystä kokonaislukujen ja murtolukujen yhteydestä paremmin aikaisempina lukuvuosina.

4.2 Murtoluvun käsitteen erilaiset esitystavat

Tärkeässä osassa oppimisen tukemisessa oppikirjoissa ovat havainnollistavuus ja monipuoliset murtolukujen esitystavat. Lähdin etsimään kirjasarjoista oppikirja kerrallaan tapoja, joilla oppikirjat esittävät murtolukuja opetusmateriaalissaan. Rajasin etsinnän oppikirjojen tarjoamiin opetusnurkkiin, mutta nostin myös esille erilaisia tehtävien keinoja

esittää murtolukuja, jos ne erosivat tai tarjosivat uusia keinoja esittää murtoluvun käsitettä ja konseptia oppilaalle opetusnurkan ulkopuolelta.

| | Ympyrä- malli | Numeraa- linen | Nelikulm. tai muut kuviot | Lukujana | Kirjoitet- tu muoto | Osa jostakin ryhmästä |
|-----------------|------------------|-------------------|---------------------------------|----------|------------------------|-----------------------------|
| Milli 3b | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ |
| Tuhattaituri 3b | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Milli 4b | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Tuhattaituri 4b | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ |
| Milli 5b | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Tuhattaituri 5b | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Milli 6b | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ | ✗ | ✓ |
| Tuhattaituri 6b | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ |

Kuva 2: Murtolukujen esitystavat oppikirjakohtaisesti. Vihreällä kuvataan etsityn esitystavan löytymistä oppikirjojen opetusnurkasta esimerkkeinä. Keltaisella kuvataan esitystapoja, jotka löytyivät oppikirjojen tehtävistä, mutta eivät opetusnurkkien esimerkeistä. Punaisella kuvataan esitystapoja, joita ei löytynyt oppikirjasta.

4.2.1 Milli-kirjasarja

Milli-kirjasarjassa murtoluvun käsitettä esitetään ensimmäistä kertaa kolmannen lukuvuoden oppikirjassa numeromallilla, auki kirjoittaen, sekä lukujanalla. Ensimmäisen kappaleen jälkeen oppilaalle esitetään numeraalinen esitysmuoto, joka linkitetään aiemmin opittuun ympyrämalliin, kirjoitettuun ja lukujanamalliin. Tehtävissä ympyrämallin lisäksi tarjotaan havainnollistavia malleja erilaisin muodoin, kuten kolmioina, seitsemänkulmioina tai nelikulmioina, joiden osat ovat jaettu yhtä suuriin osiin. Näistä nelikulmioita hyödynnetään myös myöhemmin opetusnurkissa ympyrämallin ja lukujanamallin ohella havainnollistavana opetuskeinona numeraalisen esitystavan kanssa.

Neljännän lukuvuoden oppikirjassa murtolukuja esitetään yhä samoilla esitystavoilla, mutta mukaan otetaan myös osa ryhmästä-esitystapa, jossa kaksi viidestä tähdestä on väritetty, ja tämä esitysmuoto linkitetty sekä numeraaliseen, että kirjoitettuun esitystapaan. Oppikirja esittelee myös jakolaskun kaksoispisteen ja jakojäännöksen yhteyden murtolukuihin, jossa seitsemän on jaettu kolmella ja tulokseksi saatu ”2, jää 1”, joka on linkitetty vastaaviin murto- ja sekalukuihin $\frac{7}{3}$ ja $2\frac{1}{3}$.

Viidennen lukuvuoden oppikirjoissa esitystavat pysyvät samoina kuin neljännen vuoden oppikirjoissa, mutta mukaan lisätään havainnollistava esitystapa laventamisesta sekä supistamisesta, jotka havainnollistavat oppilaalle, että laventaessa tai supistaessa murtoluvun suuruus ei muutu. Kyseisessä esitystavassa ympyrämalli jaetaan useampiin osiin väritetyillä viivoilla, jotka kuvastavat uusia laventamisen jälkeisiä osuuksia.

Kuudennen lukuvuoden oppikirjoissa esitystapoja on vähennetty viidennen lukuvuoden oppikirjaan verrattaessa. Numeraalinen esitystapa on vahvasti mukana jokaisessa kappaleessa ympyrämallin kanssa, mutta lukujana esitystapana on jätetty pois, kirjoitettua esitysmuotoa ei esiinny oppikirjassa, sekä kaikki kuvalliset esitystavat tapahtuvat pelkästään ympyrämallilla. Laventamista ja supistamista havainnollistavat esitystavat on pidetty mukana edelliseltä vuodelta. Myös jakolaskujen kaksoispisteen ja jakojäännöksen yhteyttä havainnollistava esitysmuoto esiintyy kirjassa sekalukuja käsiteltäessä. Tehtävien puolella kirjasarja tarjoaa vielä lisäksi havainnollistavia esitystapoja neliömallilla, sekä osuutena jostakin määrästä kuvioita, esimerkiksi tähtiä tai ympyröitä.

Milli-kirjasarja tarjoaa oppikirjoissaan monipuolisesti oppimista tukevia murtolukujen esitystapoja ja painottaa näiden esitystapojen monipuolisuutta etenkin murtolukujen oppimisen alkuaikoina. Kuudennen lukuvuoden oppikirjassa näitä esitysmuotoja on kuitenkin jo reilusti vähennetty ja opetusnurkkien sisällöt keskittyvät eri keinoihin tukea oppimista, kuten pidempien esimerkkien läpikäyntiin laskuvaihe kerrallaan. Kaikkein eniten erilaisista murtolukujen käsitteen esitystavoista Milli-kirjasarjassa hyödynnettiin numeraalista esitystapaa, sekä ympyrämallia, joka on jaettu yhtä suuriin ympyräsektoreihin.

4.2.2 Tuhattaituri-kirjasarja

Tuhattaituri-kirjasarjassa murtoluvun käsite esitetään ensimmäistä kertaa kolmannen lukuvuoden oppikirjassa. Heti ensimmäisestä kappaleesta lähtien murtoluvuille esitetään useampi esitystapa: Ympyrämalli, jossa ympyrä on jaettu yhtä suuriin ympyräsektoreihin, numeraalinen esitysmuoto, sekä auki kirjoitettu esitysmuoto. Myöhemmin kolmannen lukuvuoden oppikirja esittelee murtolukua myös lukujanalla opetusnurkissa. Opetusnurkkien ulkopuolella tehtävissä murtolukuja käsitellään myös muissa havainnollistavissa esitysmuodoissa, kuten nelikulmiomalleissa, jotka ovat jaettu yhtä suuriin osuuksiin.

Neljännän lukuvuoden oppikirjassa kaikki aikaisemmat esitysmallit pysyvät edelleen mukana, mutta mukaan on lisätty myös sekalukujen parissa myös Milli-kirjasarjasta löytynyt yhteys jakolaskun kaksoispisteeseen, jossa sekaluvusta siirrytään ensin numeraaliseen murtolukumuotoon ja tämän jälkeen $\frac{7}{3} = 2, \text{jää } 1\text{-muotoon}$, joka auttaa oppilaita ymmärtämään murtolukujen ja jakolaskun yhteyden. Tämän lisäksi opetusnurkissa pyritään havainnollistamaan supistamista ja laventamista ympyrämallin avulla, joissa samansuuruisia murtolukuja ovat esitetty ympyrämallilla ja numeraalisella esitystavalla yhtä suuruutta havainnollistaen.

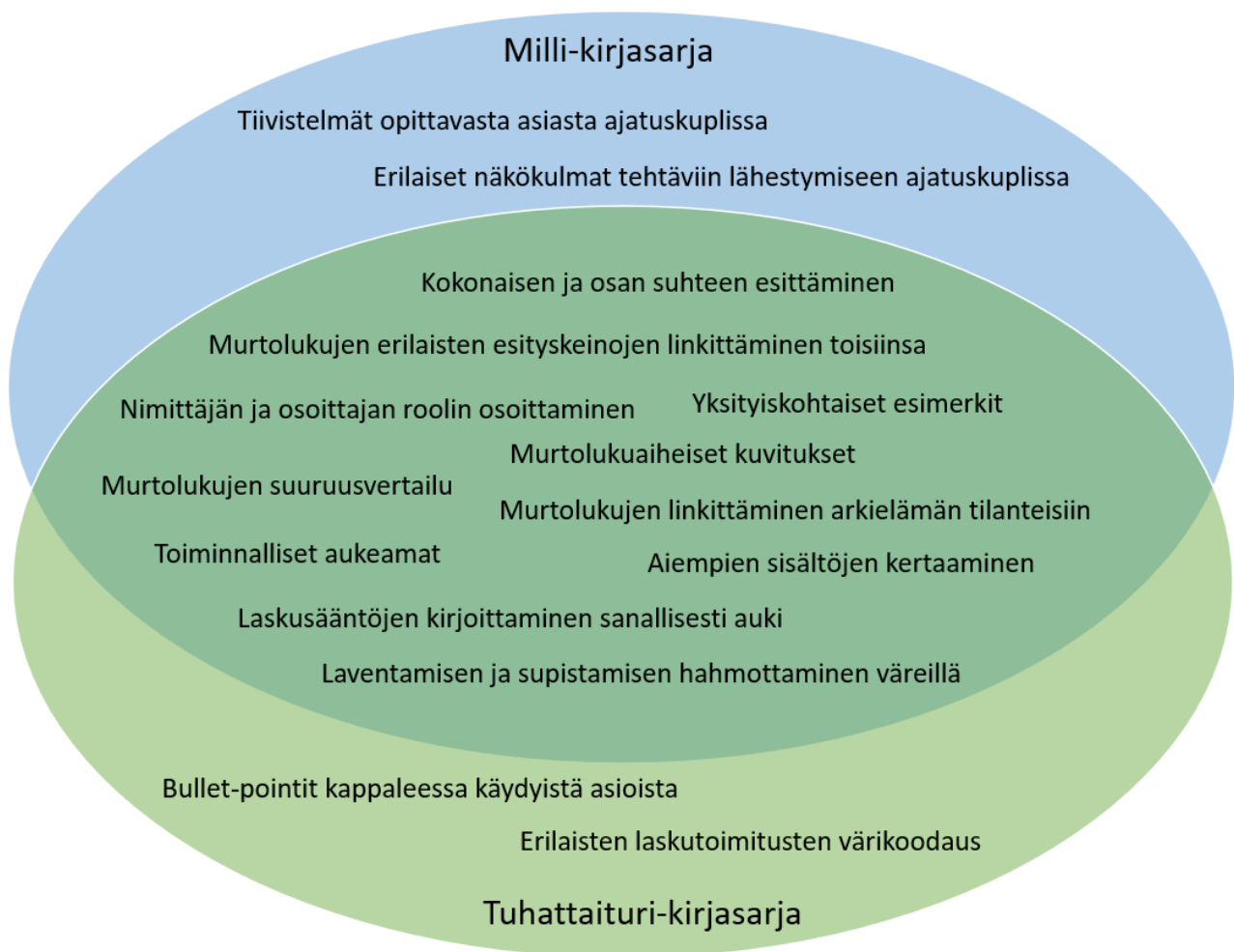
Viidennen lukuvuoden oppikirjassa ensimmäisessä kappaleessa kirja esittelee useimmat jo aiemmin esitellyt murtolukujen esitystavat, aiemmista esitystavoista muut kuvalliset esitystavat ympyrämallin ulkopuolelta jäävät pois tämän kirjan opetusnurkista, sekä kirjallisesta esitystavasta on myös luovuttu. Myös murtolukujen ja jakolaskujen kaksoispisteen yhteyttä ei esitetä opetusnurkissa viidennestä vuodesta eteenpäin. Myöhemmin kappaleessa *osan ottaminen luvusta* havainnollistetaan murtolukuja jakamalla jokin ryhmä kappaleita pienempiin ryhmiin, tässä tapauksessa ryhmä ympyröitä on jaettu kahden ympyrän ryhmiin.

Kuudennelle lukuvuodelle siirryttäessä yhä useampi murtolukujen esitystapa jätetään pois opetusnurkista ja kuvilla havainnollistamisen sijaan hyödynnetään esimerkeissä ympyrämallia ja numeraalista esitystapaa. Murtolukujen jakamisen sisällöissä jakamista havainnollistetaan uudella tavalla jakamalla ympyrämallin ympyräsektorit pienempiin osiin. Kuitenkaan myöskään tehtävien parissa ei kirjasarja hyödynnä enää ollenkaan erilaisia havainnollistavia esitystapoja näiden esitysmallien ulkopuolelta.

Tuhattaituri-kirjasarjassa erilaiset murtolukujen havainnollistavat esitystavat painottuvat selkeästi kolmannen ja neljännen lukuvuoden oppikirjoihin. Viidentenä ja kuudentena lukuvuonna oppinurkkaukset keskittyvät enemmän haastavampien esimerkkien läpikäymiseen laskuvaihe kerrallaan, kuten Milli-kirjasarjan kuudennen lukuvuoden oppikirja. Monipuoliset murtolukujen esitystavat tukevat oppilaan murtolukukäsityksen kehitystä alkuvaiheissa, mutta myöhemmin Tuhattaituri-kirjasarjan painotus murtolukujen parissa siirtyy laskutehtävien ja haastavampien sisältöjen oppimisen tukemiseen. Kuten Milli-kirjasarjassa, Tuhattaituri-kirjasarja hyödyntää eniten numeraalista murtolukujen esitysmuotoa ympyrämallin kanssa murtolukusisällöissään koko alakoulun ajan.

4.3 Murtolukujen oppimisen tukemisen keinot oppikirjoissa

Murtolukukäsitteen oppimisen tukemista ja ongelmakohtien ehkäisemistä oppikirjat pystyvät tekemään murtolukukappaleissaan valitsemillaan sisällöillä ja näiden painotuksilla. Erityisessä roolissa ovat myös edellisessä sisällönanalyysin sisältöalueessa mainitut murtolukukäsitteen erilaiset esitysmallit. Tässä sisällönanalyysin sisällössä lähdin etsimään oppikirjoista näitä murtolukukäsitteen oppimisen tukemisen keinoja ja ongelmakohtien ehkäisemisen keinoja erilaisten esitysmallien ulkopuolelta, joita käsittelin jo laajasti edellisessä sisältöalueessa. Etsittävät sisällöt perustuivat aikaisempaan murtolukututkimukseen ja murtolukujen oppimisen tukemiseen, joiden sisältöjä olen avannut tutkimukseni taustatutkimuskappaleessa.



Kuva 3: Murtolukujen oppimisen tukemisen keinot oppikirjasarjoissa. Venn-diagrammin sinisellä alueella sijaitsevat tukemisen keinot löytyivät Milli-kirjasarjasta, vihreällä alueella löytyvät tukemisen keinot löytyivät Tuhattaituri-kirjasarjasta. Keskellä molempien alueiden sisältä löytyvät tukemisen keinot olivat läsnä molemmissa kirjasarjoissa.

4.3.1 Milli-kirjasarja

Milli-kirjasarjan kolmannen lukuvuoden oppikirjassa murtolukukäsitteen ymmärtämisen tukemiseen tarjotaan erilaisia tuen keinoja. Kolmantena lukuvuonna oppilaille opetetaan nimittäjän ja osoittajan roolit numeraalisessa murtoluvussa ja niiden merkitykset on kir-

joitettu auki samalla tarjoten kuvallinen esitys murtoluvusta. Opetuksen tukena on hyödynnetty useiden eri esitystapojen samanaikaista käyttöä, joka auttaa oppilaita ymmärtämään näiden esitysmuotojen yhteneväisyyttä. Murtolukujen suuruusvertailulle on tehty oma kappaleensa, joka auttaa edelleen oppilaita ymmärtämään murtolukukäsitettä paremmin. Kun oppilaat siirtyvät murtolukukäsitteestä murtolukujen aritmetiikkaan, oppikirjojen oppinurkkaukset tarjoavat yksinkertaisen esimerkin kappaleessa opittavasta aritmeettisesta toimituksesta. Lyhyet napakat lauseet läpi useamman sisältökappaleen toimivat myös lyhyenä tiivistelmänä opitusta asiasta. ”*Jos nimittäjät ovat samat, vertaa osoittajia*”. Nämä lauseet myös pitävät sisällään kaksi murtolukujen neljästä laskusäännöstä, ”*Laske yhteen osoittajat. Nimittäjä ei muutu*” Yhteenlaskukappaleessa, sekä vastaavasti ”*Vähennä osoittajasta. Nimittäjä ei muutu*” vähennyslaskukappaleessa.

Neljännän lukuvuoden oppikirjassa murtolukujen käsittely aloitetaan kertaamalla murtolukujen ja sekalukujen käsitteet. Jälleen erilaiset esitystavat linkitetään toisiinsa, sekä osoittaja ja nimittäjä esitellään uudestaan oppilaille. Uutena asiana oppilaille nimetään sekaluvusta kokonaisuosa, sekä murto-osa, joiden parissa seuraavissa kappaleissa vieteään aikaa. Hidas eteneminen vanhaa kertaamalla toimii murtolukukäsitettä vahvistavana tuen keinona neljännen lukuvuoden oppikirjoissa. Tuen keinoina opetusnurkissa käytetään edellisen lukuvuoden tavoin esimerkkitehtäviä kappaleen sisällöistä, sekä kirjasarjassa seikkailevien hahmojen ajatuskuplia, jotka toimivat tiivistelminä kappaleessa opitusta asiasta, tai tarjoavat erilaisen näkökulman opittavaa sisältöä lähestymiseen. Erilaiset murtolukujen esitystavat ja niiden linkittäminen numeraaliseen esitykseen ovat edelleen vahvasti läsnä oppinurkissa.

Viidennen lukuvuoden oppikirjassa erilaiset esitystavat ovat vahvasti läsnä ensimmäisessä kappaleessa, mutta vähentyvät sisältöjen edetessä haastavampiin sisältöalueisiin. Oppinurkkaukset tarjoavat viidennen lukuvuoden jälkeen selkeästi enemmän tekstisisältöä ja opittavat sisällöt kirjoitetaan auki esimerkein, siinä missä aikaisempien vuosien kirjoissa oppinurkkaukset keskittyivät esimerkkien visualisointiin. Myös kirjasarjan hyödyntävien ajatuskuplien sisällöt ovat muuttuneet viidennelle vuodelle siirryttäessä. Ajatuskuplat eivät enää toimi lyhyinä tiivistelminä kappaleiden sisällöistä, vaan tarjoavat ensisijaisesti erilaisia näkökulmia tai vinkkejä lähestyä opittavaa asiaa. Esimerkiksi ajatuskuplan lause: ”*Mieti, minkä luvun kertotaulussa osoittaja ja nimittäjä ovat.*” toimii nopeana vinkkinä oppilaalle *Supistaminen*-kappaleen oppinurkkauksessa, jos oppilas löytää itsensä umpikujasta tehtävien parissa. Kappaleessa *Murtoluvun kertominen luonnollisella luvulla* oppimisen tueksi esitellään erilaisia ajattelutapoja, joilla sisältöä voidaan lähestyä,

sekä osoittaa molempien ajatustapojen olevan yhtä validi ja johtavan oikeaan ratkaisuun. Viimeisen murtolukukappaleen oppinurkassa oppimisen tueksi tuodaan tehtäviin mukaan myös konkretia ja arkielämän viittaukset. Esimerkin tehtävässä lasketaan ukulelen soittajia orkesterista, joka auttaa oppilaita ymmärtämään murtolukujen konseptia niiden abstraktisuuden ulkopuolelta arkielämän esimerkein.

Milli-kirjasarjan kuudennen lukuvuoden oppikirja tarjoaa murtolukujen opetuksen tueksi hyvin samankaltaisia tuen keinoja kuin viidennen lukuvuoden oppikirja. Oppinurkkaukset sisältävät yksityiskohtaisempia esimerkkejä, joiden laskusäännöt on kirjoitettu usein auki. Erilaisia havainnollistavia esitystapoja on vähennetty kolmannen ja neljännen lukuvuoden oppikirjoihin nähden ja tuen keinot keskittyvät sääntöjen auki kirjoittamiseen ja monipuolisempiin esimerkkeihin. Laventamiseen ja erinimisten murtolukujen yhteenlaskuun esitetään neuvoksi etsiä yhteinen nimittäjä havainnollistavalla esimerkillä, jota edellisen lukuvuoden oppikirjasta ei löytynyt laventamisen sisältöjen yhteydestä. Lyhyet lauseet ajatuskuplissa toimivat yhä edellisen lukuvuoden oppikirjaa enemmän vinkkeinä tehtävien tekemiseen, mutta pitävät sisällään myös erilaisia näkökulmia opittavaa sisältöä lähestymiseen.

Läpi kirjasarjan, opetusnurkkaukset ja kappaleiden aukeamat pitävät sisällään kuvituksia hahmoista, jotka seikkailevat kirjasarjassa erilaisissa arkielämän tilanteissa. Nämä kuvitukset pitävät sisällään erilaisia murtolukuja sisältäviä objekteja tai kokonaisuuksia, joita voidaan esittää murtoluvuin. Esimerkiksi piiraat ja pizzat, jotka on jaettu samankokoisiin osiin, täyteen ja osaksi täytetyt kahvikupit, sekä juhlat, joissa osa ilmapalloista on punaisia ja osa sinisiä ovat eräitä näistä useista kirjasarjan hyödyntämistä murtolukuja sisältävistä kuvituksista. Nämä havainnollistavat kuvat esittävät murtolukuja arkielämän tilanteissa sekä toimivat apuvälineenä opettajalle, joka voi hyödyntää kyseisiä kuvia opetuksessaan murtolukujen parissa Milli-kirjasarja tarjoaa myös erilliset toiminnalliset kappaleet murtolukujen oppimiseen jokaiselta vuodelta. Toiminnallisuus ja arkielämän viitteet näissä kappaleissa auttavat oppilaita ymmärtämään murtolukukäsitettä ja sen hyödynnyksiä paremmin ja tarjoavat erilaisia oppimistapoja erilaisille oppilaille. Jokaisen lukuvuoden oppikirja pitää sisällään kaksi peliä, joissa oppilaat pääsevät pelaamaan toisiaan vastaan murtolukuaiheisissa lautapeleissä. Näiden lisäksi jokainen oppikirja pitää sisällään Projektit-aukeaman, joka tarjoaa opettajalle neljästä seitsemään erilaista toiminnallista projektia murtolukujen parissa. Nämä erilaiset toiminnalliset projektit toimivat erinomaisena oppimisen tukena ja auttavat oppilaita ymmärtämään murtoluvun konseptia myös numeraalisen aritmetiikan ulkopuolelta.

4.3.2 Tuhattaituri-kirjasarja

Tuhattaituri-kirjasarjassa kolmannen lukuvuoden oppikirjassa murtolukukäsitteen oppimisen tuen keinot keskittyvät etenkin murtolukukäsitteen ymmärtämisen tukemiseen, aritmeettisen laskennan jäädessä sisällöiltään vähäisemmälle painotukselle. Oppikirjan neljä ensimmäistä kappaletta keskittyvät murtolukukäsitteen ymmärtämiseen, jossa oppilaalle painotetaan murtoluvun ja kokonaisen suhdetta, osoittajan ja nimittäjän roolia murtoluvussa, sekä murtolukujen suuruusvertailua. Tuen keinoina näissä kappaleissa hyödynnetään murtolukujen erilaisten esitysmuotojen linkittämistä toisiinsa, numeraalisesta esitysmuodosta kirjoitettuun esitysmuotoon, lukujanamuotoon, sekä ympyrämalliin. Kappaleessa *Yksi kokonainen* oppikirja tarjoaa selventävän esityksen murtolukujen suhteesta kokonaiseen, ”Kun murtoluvun osoittaja ja nimittäjä ovat yhtä suuret, murtoluvun suuruus on yksi kokonainen.”, jota seurataan numeraalisella ja ympyrämallin esityksellä: $\frac{1}{1} = 1$, $\frac{2}{2} = 1$, $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{4}{4} = 1$, $\frac{5}{5} = 1$. Tämä havainnollistava esimerkki ehkäisee mahdollisten virhekäsitysten syntymistä osoittajan ja nimittäjän roolista murtoluvussa ja toimii hyvänä tukikeinona murtolukukäsitteen oppimisessa. Oppikirjan oppinurkkaukset pitävät sisällään kappaleen opittavat asiat bullet-pointteina, mutta muita oppimisen tukemisen keinoja hyödynnetään erilaisten esitysmuotojen ulkopuolelta vähäisesti. Edetessä suuruusvertailusta murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskuun, oppinurkkauksen hahmojen tekstikuplat kirjoittavat murtolukuja ja niiden laskutoimituksia kirjalliseen muotoon, mutta eivät tarjoa erilaista lähestymisnäkökulmaa tai vinkkejä kappaleen tehtäviin kuten Milli-kirjasarjan vastaavat ajatuskuplat.

Neljännän lukuvuoden oppikirjassa oppinurkkaukset pitävät sisällään huomattavasti enemmän tekstiä ja kappaleessa opitut asiat kirjoitetaan laajasti auki bullet-point tyylillä. Oppimisen tukena hyödynnetään ensimmäisessä kappaleessa kertausta ja vanhojen sisältöjen uudelleen läpikäymistä ja uusiin asioihin lähdetään tutustumaan toisesta kappaleesta lähtien. Oppikirja hyödyntää oppinurkkauksissa edelleen laajasti erilaisten murtolukuesitysmuotojen linkittämistä toisiinsa murtolukukäsitteen oppimisen tukikeinona, mutta muuten nojaa vahvasti oppisisältöjen kirjoittamiseen auki, joihin oppilaat pystyvät palaamaan milloin tahansa tehtävien tekemisen aikana tai kotona kotitehtäviä tehdessään. Useammassa kappaleessa oppikirja hyödyntää aritmeettisissä sisällöissään kappaleiden värikoodausta, joka auttaa oppilaita hahmottamaan, mitä kappaleen osille tapahtuu vähentäessä tai laventaessa. Nurkkauksen hahmojen ajatuskuplissa tarjotaan muutaman kerran

lisämuistutuksia jo opittuihin asioihin, mutta muuten ajatuskuplat tarjoavat neljännen lukuvuoden kirjassa pitkälti vain suoria kopioita oppinurkkauksen esimerkeistä, mutta saattavat lisätä yhden välivaiheen esitettyyn esimerkkiin.

Viidennen lukuvuoden oppikirjassa tuen keinoissa painotetaan edellisen lukuvuoden oppikirjaan nähden vähemmän murtolukujen erilaisten esitysmuotojen linkittämistä toisiinsa. Ensimmäisessä kertauskappaleessa erilaiset esitystavat ovat vahvasti läsnä, mutta myöhemmin muissa sisällöissä hyödynnetään enää ympyrämallia numeraalisen esitystavan lisäksi. Oppikirjan oppinurkkaukset painottavat sisällöissään enemmän pidempiä ja vaihe vaiheelta esitettyjä esimerkkejä, sekä opittavien sisältöjen kirjoittamista auki, jotta oppilaat voivat palata niihin myöhemmin omatoimisesti. Kappaleessa *Yhteenlaskusta kertolaskuun* oppikirja esittelee kaksi erilaista laskutapaa samalle laskulle, joiden esitetään toimivan yhtä hyvin erilaisina lähestymistapoina kappaleen sisällöille. Tämä esitystapa voi auttaa oppilaita lähestymään kappaleessa käytävää sisältöä paremmin itselleen sopivasta näkökulmasta, sekä ymmärtämään murtolukujen ominaisuuksia paremmin. Viimeisissä murtolukuaiheisissa kappaleissa oppikirjassa lukunurkkaukset pitävät sisällään esimerkkitehtäviä kappaleen sisältöön nähden, jotka käydään läpi laskuvaihe kerrallaan.

Kuudennen vuoden oppikirjassa edellisten lukuvuosien oppikirjojen mukaisesti oppinurkkaukset pitävät sisällään paljon tekstiä ja erilaisia esimerkkejä. Oppinurkkaukset hyödyntävät edelleen ympyrämallia numeraalisen esitystavan kanssa esimerkkien havainnollistamisessa useammassa kappaleessa. Kuudennen lukuvuoden oppikirja tarjoaa oppilaille esimerkkilaskut jokaisen käsiteltävän kappaleen tehtävistä välivaiheineen, jotka ovat myös kappaleissa otsikoitu ja värikoodattu, jotta oppilaan on helppo ongelmatilanteessa palata kappaleen esimerkkitehtävään ottamaan mallia tehtävän ratkaisemisessa. Kappaleessa *Laventaminen samannimisiksi* oppikirjan nurkkauksen esimerkki on avattu kirjoitettuun muotoon ja ohjeistus tehtävässä etenemiseksi on kirjoitettu hyvin tarkasti läpi. Samantyylistä tehtävässä kohta kerrallaan tarkkaa ohjeistusta hyödynnetään myös muissa kappaleissa bullet-point-tyylillä. Yksityiskohtaiset ja tarkasti ohjeistetut esimerkit, joita esitetään oppinurkkauksissa myös useampi, painotetaan selvästi oppimisen tukemisen keinona kuudennen lukuvuoden oppikirjassa, erilaisten murtolukujen esitystapojen jäädessä selkeästi vähemmälle.

Kuten Milli-kirjasarjassa, Tuhattaituri-kirjasarjan oppikirjat pitävät sisällään kuvituksia kirjasarjassa seikkailevista hahmoista eri tilanteissa. Monet näistä kuvituksista pitävät sisällään erilaisia murtolukuihin liittyviä kuvauksia. Esimerkkejä näistä kuvituksista ovat

pizzat, jotka on jaettu yhtä suuriin pizzapaloihin, yhtä suuriin osiin jaetut piiraat, hedelmät ja kissapentueet, joista osa on harmaita ja osa ruskeita. Tuhattaituri-kirjasarjassa jokaisen lukuvuoden murtolukukappaleisiin on myös linkitetty oma toimintatunti-kappaleensa, joka pitää sisällään toiminnallisia tehtäviä murtolukujen parissa. Nämä toiminnalliset tehtävät pitävät sisällään pääosin lautapelejä, joita oppilaat pääsevät pelaamaan toisiaan vastaan.

Tässä kappaleessa käyn läpi saatuja sisällönanalyysin tuloksia syvällisemmin ja pohdin saatujen tuloksien merkityksiä asettamiini tutkimuskysymyksiin nähden. Käyn läpi jokaisen asettamani sisällönanalyysin sisältöalueen tuloksia kysymyskohtaisesti ja käsittelen tulosten eroavaisuuksia kirjasarjakohtaisesti, sekä yhtenäisenä kokonaisuutena murtolukujen oppimisesta alakoulun matematiikan oppikirjoissa. Tutkimukseni pohdintaosiossa käyn läpi myös tutkimukseni onnistumista ja luotettavuutta, sekä käyn läpi mahdollisuuksia tulevaisuuden tutkimukseen murtolukujen oppimisen tukemisen parissa.

5.1 Pohdintaa sisällönanalyysin tuloksiin liittyen

Ennen tutkimuskysymyksiä läpikäymistä on tärkeää analysoida saatuja tuloksia sisällönanalyysistä ja avata tutkimuksesta saatujen tuloksien merkitystä tutkimuskysymyksille ja tutkimuksesta johdettaviin johtopäätöksiin tutkimuskysymyksiä vastauksista.

5.1.1 Murtolukujen sisällöt oppikirjoissa

Tuhattaituri-kirjasarjan sisällöt jakautuvat hieman eroavalla tavalla Milli-kirjasarjaan nähden. Tuhattaituri-kirjasarjassa sekalukujen sisällöt otetaan käsittelyyn neljäntenä lukuvuonna, ja laskut sekaluvuilla löytyvät oppikirjan sisällöistä vasta hieman yllättäen kuudentena lukuvuonna. Sisällöistä laventaminen ja supistaminen tulevat mukaan neljäntenä lukuvuonna, sekä yhteen- ja vähennyslaskut erinimisillä murtoluvuilla ovat myös mukana neljännen lukuvuoden sisällöissä. Kokonaisuudessaan tutkimustuloksissa kirjasarjat käsittelemään hyvin pitkälti samat sisällöt murtolukujen oppisisällöistä peruskoulun opetussuunnitelman mukaisesti. Sisältöjen laajuudessa esiintyi kuitenkin myös pieniä

eroja. Tuhattaituri-kirjasarjassa käsiteltävissä murtolukujen sisällöistä löytyivät myös piti-laskut murtolukujen avulla, sekä murtolukujen laskujärjestykseen keskittyvä oppisisältö, joita Milli-kirjasarjassa ei käsitelty omina sisältökokonaisuuksinaan.

Käsiteltäessä oppikirjasarjoja yhtenäisenä otoksena matematiikan oppikirjoista Suomessa, tutkimuksessa löydetyt murtolukujen oppisisällöt noudattivat perusopetuksen opetussuunnitelman perusteista löytyviä sisältöjä ja tavoitteita. (OPS, 2014) Opetussuunnitelman perusteet antoivat kuitenkin hyvin avonaiset rajaukset asetetuista tavoitteista ja sisällöistä, joten oli myös mielenkiintoista todeta, että oppikirjoista löydetyt murtolukujen sisällöt päätyivät käsittelemään pitkälti samat sisällöt perusopetuksen aikana avoimesti asetetuista ehdoista huolimatta. Tutkimuksessa löydetyt murtolukujen sisällöt asettuvat samoille linjauksille pitkälti kansainväliseen tutkimukseen murtolukujen oppimisesta, joiden perusteella on syntynyt selvästikin konsensus mitä murtolukujen sisältöjä alakouluissa tulisi murtolukuihin liittyen opettaa ja missä vaiheessa alakoulun oppipolku.

Kirjasarjat käsitelivät ensimmäisinä murtolukuaiheisina sisältökappaleinaan murtolukukäsitteen oppimista ja kokonaisen jakamista osiin ennen peruslaskutoimituksiin siirtymistä. Nämä sisällöt on asetettu käsiteltäviksi perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (OPS, 2014), sekä aiemmassa tutkimuksessa on painotettu näitä sisältöjä murtolukukäsitteen kehittymisen tärkeydessä. (Empson, 2003) Ensimmäisinä oppivuosina peruslaskutoimituksista otetaan käsittelyyn yhteen- ja vähennyslasku ja myöhemmin oppivuosina oppikirjoissa aletaan käsitellä murtolukujen kerto- ja jakolaskuja. Sekaluvun käsitteeseen tutustutaan oppikirjoissa eri vaiheissa, vaikka sekalukujen käsitteleminen murtolukusisältöjen alkuvaiheessa tukisi murtolukujen ja kokonaisen suhteen ymmärtämistä sekä oppilaan murtolukukäsitteen oppimista. Tuhattaituri-kirjasarjan päätös jättää sekaluvuilla laskeminen vasta kuudennen lukuvuoden oppikirjojen sisältöihin ei seuraa tässä sisällössä samaa lähestymistapaa, jossa ensimmäisinä oppivuosina painotus olisi juuri murtolukukäsitteen oppimisessa peruslaskutoimitusten oppimisen sijaan. Huomioitavana on kuitenkin myös asia, ettei opetussuunnitelman perusteet mainitse sekalukuja ollenkaan matematiikan sisällöissään.

Kirjasarjoja hyödyntävän opettajan ja oppilaan on perusteltua seurata oppikirjojen sisältöjä ainakin suuntaa antavasti läpi kouluvuosien. Oppikirjojen sisältöalueet etenevät loogisesti murtolukukäsitteen kehittymisen tukemisesta yksinkertaisiin aritmeettisiin laskutoimituksiin murtoluvuilla, hitaasti edeten vuosien varrella haastavampiin sisältöalueisiin, joissa murtolukukäsitteen ymmärtäminen helpottaa sisältöalueiden uusien sisältöjen

oppimista. Ensimmäisten sisältöalueiden kertaantuminen useampana vuotena toimii myös oppimisen tukikeinona läpi oppilaan opintopolun ja helpottaa myöhemmin vuosina uusiin murtolukusisältöihin siirtymistä ensin jo opittuja murtolukujen perusteita kerraten. Mielenkiintoisena poikkeuksena Tuhattaituri-kirjasarjassa tapahtuva myöhäinen sekalukujen laskemisen esiintyminen oppisisällöissä voi olla kuitenkin huomio, jota kyseistä kirjasarjaa hyödyntävän opettajan olisi hyvä tiedostaa. Tilanteessa, jossa oppilas joutuu vaihtamaan kirjasarjaa kesken opintojensa, voi oppilas sekalukujen parissa kohdata ongelman, jossa Milli-kirjasarja olettaa oppilaan jo kuudentena vuonna ymmärtävän sekalukujen aritmeettisiä laskutoimituksia, mutta Tuhattaituri-kirjasarjaa aiemmin hyödyntänyt oppilas ei ole kyseistä sisältöaluetta vielä käsitellyt oppikirjoissaan, ellei opettaja ole kyseistä sisältöaluetta oppikirjasarjan ulkopuolelta käsitellyt opetuksessaan.

Murtolukujen sisältöalueiden käsittely oppikirjoissa on kahta oppikirjasarjaa analysoidessa saavuttanut jonkinasteisen konsensuksen, mitä sisältöalueita oppikirjoissa tulisi käsitellä, sekä mitä sisältöalueita murtolukukäsitteen oppimisen tukemiseen murtolukujen oppimisen alkuvaiheissa tulisi käsitellä. Kirjasarjat seuraavat myös murtolukujen oppisisältöjä opetussuunnitelman perusteiden mukaisesti ja käyvät läpi tarvittavat murtolukujen neljä sääntöä oppisisällöissään. Murtolukujen osaamisen hyödyntämisessä ja laajentamisessa on kuitenkin vielä eroavaisuuksia ja tulevaisuuden kehittymismahdollisuuksia oppikirjasarjojen oppisisällöissä. Tuhattaituri-kirjasarjassa kappale *Pituuslaskuja* on esimerkki tämänlaisesta kappaleesta, joka hyödyntää jo opittuja murtolukujen ominaisuuksia ja laskusääntöjä arkielämän konkreettisiin laskutehtäviin. Murtolukujen oppimisen tukeminen opintosisällöissä keskittyy laajasti edellisenä vuotena käytyjen asioiden kertautamiseen, mutta murtolukujen osaamisen hyödyntämistä ja taitojen soveltamista oppikirjoissa ei tarjota sisältöjen puolesta vielä monipuolisesti.

5.1.2 Murtoluvun käsitteen erilaiset esitystavat

Sisällönanalyysin tuloksista murtoluvun käsitteen erilaisiin esitystapoihin liittyen, molemmat analysoidut Milli- ja Tuhattaituri-kirjasarjat hyödyntävät erilaisia murtolukujen esitystapoja oppikirjoissaan hyvin samankaltaisesti. Molemmat kirjasarjat tukeutuvat ensimmäisinä murtolukujen käsittelyvuosina esitystapoinaan monipuolisesti niin ympyrämalliin, numeraaliseen esitystapaan, nelikulmioihin ja muihin yhtä suuriin osuuksiin ja ettuihin kuvioihin, lukujanaan, kirjoitettuun esitystapaan ja esittämällä murtoluvun myös osana jotain joukkoa. Sisällönanalyysissä löydetyt eroavaisuudet kirjasarjojen välillä oli-

vat melko vähäisiä. Suurimpana eroavaisuutena löytyi, että Tuhattaituri-kirjasarja ei hyödyntänyt oppikirjoissaan opetusnurkissa esimerkkeinä muita havainnollistavia kuvioita ympyrämallin lisäksi, toisin kuin Milli-kirjasarjan kolmannen, neljännen ja viidennen lukuvuoden oppikirjat. Nämä esitystavat olivat kuitenkin käytössä oppikirjan tehtäväpuolella jokaisen oppivuoden kirjoissa. Toinen eroavaisuus oli Milli-kirjasarjan aloittavan murtolukukäsitteen esittämisen osana jostakin joukosta vasta neljäntenä lukuvuonna, kun Tuhattaituri-kirjasarjassa kyseinen esitysmuoto löytyi kolmannen lukuvuoden tehtävissä. Toisaalta Tuhattaituri-kirjasarjassa tätä esitysmuotoa hyödynnettiin opetusnurkassa esimerkkinä vasta viidentenä lukuvuonna. Kokonaisuudessaan kirjasarjat hyödynsivät kuitenkin murtolukujen erilaisia esitysmuotoja hyvin samankaltaisesti läpi alakoulun.

Murtolukujen erilaiset esitystavat ovat erinomainen tapa tukea murtolukukäsitteen oppimista etenkin ensimmäistä kertaa oppilaiden tutustuessa murtolukuihin. Sisällönanalyysistä saatujen tulosten mukaisesti erilaiset murtolukujen esitystavat ovat laajasti molemmissa kirjasarjoissa käytössä kolmannelta lukuvuodelta viidennelle lukuvuodelle. Tuloksista huomataan kuitenkin, että kuudennen vuoden oppikirjoissa erilaisia murtolukujen esitystapoja ei enää hyödynnetä samalla tavalla kuin aikaisempina lukuvuosina, vaan kirjasarjat keskittyvät hyödyntämään sisältöalueita opettaessaan pääosin ympyrämallia, sekä numeraalista esitystapaa. Yksittäiset tehtävät oppikirjoissa pitävät vielä sisällään erilaisia havainnollistavia esitystapoja, kuten esimerkiksi neliö, joka on jaettu useampaan osaan. Kuitenkin opetusnurkissa ja opetettavissa esimerkeissä kirjasarjat hyödyntävät enää ainoastaan ympyrämallia ja numeraalista esitystapaa.

Murtolukukäsitteen erilaisten esitystapojen hyödyntäminen ei ole perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden asettamia vaatimuksia kirjasarjoille, joten oli mielenkiintoista havaita, että kirjasarjoilla oli selvästi jonkinlainen konsensus siitä, kuinka murtolukujen erilaisia esitystapoja tulisi hyödyntää oppikirjoissa. Nämä valinnat erilaisten esitysmuotojen hyödyntämisestä nojaavat vahvasti aikaisempaan tutkimukseen, joka on osoittanut, että erilaiset murtolukujen esitystavat opetuksessa ovat erinomainen tuen keino murtolukukäsitteen syntymisvaiheessa. (Behr, Lesh, Post, 1983; Tuominen, 2021) Myöhemmin murtolukujen oppisisältöjen siirtyessä enemmän laskutoimitusten pariin, erilaisten esitystapojen painotus oppimateriaalissa jätetään pienemmälle ja oppimateriaali keskittyy enemmän haastavampien esimerkkitehtävien läpikäymiseen ja laskutoimitusten ohjeistamiseen laskuvaiheittain.

Kirjasarjoja hyödyntävän opettajan on hyvä huomata kirjasarjojen tarjoamat erilaiset murtolukukäsitteen esitysmallit ja hyödyntää näitä opetuksessaan murtolukujen parissa. Molemmat kirjasarjat tarjoavat monipuolisesti murtolukujen esitysmalleja esimerkeissään ja tehtävissään, mutta opettajan vastuulle jää hyödyntää ja selittää näiden esitysmallien yhteyksiä oppilaalle. Myös erilaisten murtolukujen esitystapojen väheneminen etenkin kuudennen lukuvuoden oppikirjoissa olisi hyvä huomioida. Erityisesti tärkeää on huomioida tällöin oppilaat, joille murtoluvun konsepti ei vielä ole täysin selvä, tarjoamalla heille mahdollisesti tarvittavat tuen keinot tai havainnollistavat esimerkit, jotta oppilas ymmärtää varmasti opiskeltavat sisällöt. Erilaisia murtolukujen esitystapoja tarjotaan myös kappaleiden kuvituskuviin läpi alakoulun oppikirjojen. Nämä kuvituskuvat tarjoavat esimerkiksi keskustelua avaavia kysymyksiä opettajalle, joiden avulla opettaja voi luoda keskustelua luokassa murtolukujen parissa.

Murtolukujen esityskeinojen monipuolinen hyödyntäminen ei tarvitsisi kuitenkaan loppua kuudennen tai jo viidennen lukuvuoden oppikirjojen esimerkeissä. Erilaiset esitystavat tukevat murtolukujen parissa haasteita kokevia oppijoita myös alakoulun loppuvaiheessa, etenkin jos oppilaalla on vielä hankaluuksia ymmärtää murtoluvun käsitettä. Murtolukujen erilaiset esitystavat olivat kirjasarjoissa monipuolisia, mutta hyödyntämättä käytettyjä esitystapoja, joita aiemmassa murtolukututkimuksessa on todettu toimiviksi, löytyy yhä. Esimerkiksi hyväksi todettu kellokonsepti (Maysen-Clay, 2005), voisi toimia myös murtolukujen oppisisällöissä eräänä esitystapana, sekä kertauksena myös analogisen kellon oppisisältöön matematiikan opetussuunnitelman oppisisällöissä (OPS, 2014)

5.1.3 Murtolukujen oppimisen tukeminen oppikirjoissa

Murtolukujen oppimisen tukemisen keinoina oppikirjat hyödynsivät monipuolisesti erilaisia tukemisen keinoja, jotka aikaisemmissa murtolukujen oppimiseen liittyvissä tutkimuksissa ovat todettu toimiviksi. Etenkin murtolukukäsitteen kehittymisessä tukkeinoina käytettiin laajasti edellisessä kappaleessa analysoituja murtoluvun käsitteen erilaisia esitystapoja. Näiden erilaisten esitystapojen linkittäminen toisiinsa auttaa oppilasta ymmärtämään murtoluvun käsitettä, sekä konkretisoimaan abstrakteja murtolukuja mielessään. (Behr, Lesh, Post, 1983) Murtolukukäsitteen oppimisen aloittaminen murtolukujen suhteesta kokonaislukuihin toimii hyvin pohjana siirtyä käsittelemään tutusta kokonaislukujen maailmasta uuteen rationaalilukujen maailmaan. (Empson, 2003) Nimittäjän

ja osoittajan roolin opettaminen aikaisin oppilaalle ja murtolukujen suuruusvertailu auttavat oppilasta ymmärtämään murtolukujen ominaisuuksia ja sisäistämään murtoluvun käsitteen ennen murtolukujen laskutehtäviin siirtymistä.

Murtolukukäsitteen oppimisen jälkeen haastavampien oppisisältöjen parissa oppimisen tukemisen keinoja käytettiin myös monipuolisesti sekä yhteneväisesti kirjasarjojen välillä. Yksityiskohtaiset esimerkit opittavasta asiasta, aiempien sisältöjen kertaaminen ennen uuteen asiaan siirtymistä, murtolukujen linkittäminen arkielämän tilanteisiin, laskusääntöjen kirjoittaminen sanallisesti aukeaman oppinurkkaukseen auki sekä erilaiset värikoodaukset laventamisen ja supistamisen hahmottamisen helpottamisessa olivat tukemisen keinoja, joita molemmat kirjasarjat käyttivät hyödyksi oppinurkkauksissaan. Myös kappaleiden erilaiset kuvitukset tarjosivat usein murtolukuihin liittyviä konsepteja, joita myös opettaja voi hyödyntää opetuksessaan.

Eroavaisuuksia kirjasarjoista löytyi muutamia. Milli-kirjasarja hyödynsi oppikirjoissaan kirjassa seikkailevien hahmojen ajatuskuplia, jotka pitivät sisällään tiivistelmiä opittavista asioista tai erilaisia näkökulmia tehtäviin lähestymiseen. Etenkin nämä erilaiset näkökulmat tehtävien ymmärtämiseen ja käsittelemiseen tarjoavat erinomaisen tuen oppilaille, jotka eivät välttämättä ymmärtäneen opittavaa asiaa ensimmäisen esimerkin kautta, vaan tarvitsevat erilaisen lähestymistavan kyseiseen murtolukujen sisältöön. Tuhattaituri-kirjasarjassa opittavat asiat tiivistettiin kappaleissa Bullet-point-tyylisillä tiivistelmillä, jotka olivat Milli-kirjasarjan tiivistelmiä napakampia. Tuhattaituri-kirjasarja hyödynsi myös oppinurkkauksissaan laajemmin opittavien laskutoimitusten ja sisältöjen värikoodausta. Nämä värikoodaukset auttavat oppilasta hahmottamaan ja erottamaan opittavien sisältöjen eroavaisuudet ja tapahtuvien laskutoimitusten välivaiheita paremmin.

Kuten käydessäni aikaisemmassa kappaleessa läpi erilaisia murtolukujen esitysmalleja oppikirjoissa, ei myöskään murtolukukäsitteen oppimisen tukemista tai ongelmakohtien ehkäisemistä ole ohjattu perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa. Oppikirjasarjat ovat päätyneet itsenäisesti hyödyntämään näitä edellä mainittuja tukemisen keinoja, jotka myötäilevät myös aikaisempaa tutkimusta murtolukujen tukemisesta. Erilaisten tuen keinojen erotessa hieman kirjasarjojen kesken, on kuitenkin huomattavissa, että kirjasarjat hyödyntävät paljon samanlaisia sisältövalintoja, painotuksen kohteita ja muita tuen keinoja oppikirjoissaan.

Toiminnalliset ekstrakappaleet oppikirjasarjoissa tarjoavat erinomaisen tuen murtolukujen oppimiselle erilaisten oppijoiden näkökulmasta. Toiminnalliset projektit, pelit ja tehtävät jättävät toiminnalliselle oppijalle paremmat muistijäljet opittavasta asiasta verrattuna perinteiseen tuntiopetukseen. Erilaisia oppijoita on myös otettu huomioon kirjasarjoissa sisällyttäen arkielämän todellisia sovellutuksia tehtäviin ja esimerkkeihin. Kirjasarjojen vahva havainnollistavuus monien erilaisten murtolukujen esitysmallien ja esimerkkien avulla tukevat myös monipuolisesti erilaisten oppijoiden tarpeita oppimisessa.

Kirjasarjojen monipuoliset murtolukujen oppimisen tuen keinot ovat erinomainen apu kirjasarjoja hyödyntävälle oppilaalle ja opettajalle. Kirjasarjoja hyödyntävän opettajan on edelleen hyvä huomioida nämä erilaiset tuen keinot opetuksessaan. Monipuoliset murtolukujen esitystavat on hyvä ottaa mukaan opetukseensa alusta lähtien, sekä myös huomioida kirjojen kuvituksista löytyvät arkielämän liitokset murtolukujen parissa. Myös toiminnallisia ekstrakappaleita ei olisi hyvä siirtää kokonaan syrjään vaan hyödyntää niiden tarjoamia monipuolisia oppimiskeinoja ja tukea näin erilaisten oppijoiden tarpeita monelle haastavien murtolukujen sisältöjen parissa. Myös erilaisia lähestymistapoja opittaviin asioihin tarjotaan kirjoissa satunnaisesti, mutta opettajan olisi hyvä miettiä näitä erilaisia lähestymistapoja myös kirjasarjojen tarjoamien esimerkkien ulkopuolelta, jos oppilaalla on ongelmia ymmärtää uutta opittavaa sisältöä.

Tulevaisuuden parannuksia kirjasarjoissa voitaisiin vielä nähdä tuen keinojen monipuolisuutta yhä lisäämällä. Erilaisia tuen keinoja hyödynnetään murtolukujen oppisisällöissä kiitettävän monipuolisesti, mutta monissa kohdissa kirjasarjat tukeutuvat samojen tuen keinojen kierrättämiseen vuodesta toiseen vähäisillä lisäyksillä. Toiminnallisuutta ja pehollisuutta voitaisiin myös lisätä ekstrakappaleiden ulkopuolelle, jotta nämä tuen keinot eivät jää vain ”jos aikaa jää”-kappaleisiin.

5.2 Pohdintaa tutkimuskysymyksiin liittyen

Asettamani sisällönanalyysin sisältöalueet ja näiden tulokset toimivat hyvänä lähtökohdana lähteä analysoimaan tutkimukselle asettamiani tutkimuskysymyksiä. Asettamani tutkimuskysymykset ohjasivat myös sisällönanalyysin tutkittavia sisältöjä, jotta analyysissä päästäisiin merkityksellisiin tuloksiin ja johtopäätöksiin tutkimuskysymyksiin liittyen. Ensimmäisen tutkimuskysymykseneni käsitteli erilaisia murtolukujen oppimisen tukemisen

keinoja oppikirjasarjoissa. Tutkimuksessa analysoimistani tuloksista erottui useita erilaisia oppimisen tukemisen keinoja oppikirjasarjoista. Murtolukujen sisältöalueiden tulosten perusteella oppikirjasarjoissa käsiteltävät kappaleet tukevat alkuvaiheessa murtolukukäsitteen ymmärtämistä ja tukevat oppimista etenemällä loogisessa järjestyksessä helpommista sisältöalueista haastavampiin sisältöalueisiin, joissa aiempia opittuja murtolukujen sisältöjä tulee hyödyntää. Sisällönanalyyssissä esitelty sisältöalueiden kertaantuminen lukuvuosien varrella tukee myös oppilaiden murtolukutaitoja ja helpottaa uusiin asioihin siirtymistä myöhemminä lukuvuosina.

Suorittamassani sisällönanalyyssissä erottelin myös useita sisältöalueiden ulkopuolelta löydettyjä tuen keinoja, jotka tarjoavat oppilaalle monipuolisesti tukea murtolukujen oppimiseen ja murtolukukäsitteen kehittymiseen ensimmäisen asettamani tutkimuskysymyksen mukaisesti. Mielenkiintoista oli esimerkiksi huomata kirjasarjojen kokevan murtolukujen erilaisten esitystapojen auttavan enemmän oppijoita murtolukujen oppisisältöjen alkuvaiheissa, kuten murtolukukäsitteen oppimisessa, mutta myöhemmissä vaiheissa oppikirjat eivät enää koe näitä tuen keinoja yhtä välttämättömiksi. Muista tuen keinoista, esimerkkitoteutukset ja kappaleen opittavan sisällön tiivistäminen erilaisin tavoin nousivat kaikkein käytetyimmiksi tuen keinoiksi ymmärrettävästi. Nämä melkein jokaisesta oppinurkkauksesta löytyvät tuen keinot toimivat kirjasarjoissa kuin pohjana, jonka päälle muita tuen keinoja voidaan lisätä kappalekohtaisesti tarvittaessa.

Toisena asettamanani tutkimuskysymyksenä perehdyin oppikirjasarjojen erilaisten oppijoiden huomioimiseen ja tuen keinojen monipuolisuuteen. Asettamani tutkimuskysymys nojaa vahvasti aikaisempaan tutkimukseen murtolukujen oppimisen haasteista ja erilaisten tukikeinojen hyödyntämisestä opetuksessa murtolukujen oppimisen helpottamiseksi erilaisten oppijoiden näkökulmasta. Analyysissä löydetyt sisällöt murtolukujen oppimisen tukemisessa vastasivat asettamaani tutkimuskysymykseen etenkin toiminnallisuuden, murtolukujen esitystapojen moninaisuuden, erilaisten lähestymisnäkökulmien, selkeiden ohjeiden ja esimerkkien sekä arkielämän kytköksen tavoilla. Kirjasarjat ottivat huomioon erilaisia oppijoita monin erilaisin keinoin, mutta jättivät osavastuun näiden tuen keinojen hyödyntämisestä ja huomioinnista opettajalle. Erilaisten oppijoiden tukemisen keinoja on useita, ja kirjasarjat hyödynsivät näistä monia mahdollisuuksien mukaisesti. Ymmärrettävästi kirjasarjat keskittyvät tuen keinoissaan moniaistillisen oppimisen näkökulmasta näkemiseen ja tekemiseen, jolloin muut moniaistilliset opetuksen keinot, kuten kuulemisen kautta oppiminen, jäävät opettajan vastuulle. Mahdollisuus myös kuulemisen

kautta oppimiseen voisi olla myös mahdollista tarjoamalla oppilaille äänitteitä esimerkiksi nettisivujen kautta.

5.3 Pohdintaa tutkimuksen onnistumiseen liittyen

Tutkimukseni eteni suunnitteluvaiheesta onnistuneesti sisällönanalyysin suorittamisvaiheeseen ilman ongelmia. Tutkimusmateriaalin hankkiminen onnistui ilman ongelmia, sekä valikoitunut tutkimusmateriaali oli tutkimuksen laajuuteen nähden sopivan kokoinen. Tutkimusta olisi voinut vielä laajentaa lisäämällä tutkittavaksi tutkimusmateriaaliksi vielä kolmas kirjasarja ja tutustua myös kolmannen kirjasarjan lukuvuosien 3–6 oppikirjoihin murtolukujen saralla. Tutkimukseen valikoituneet kaksi kirjasarjaa ovat kuitenkin laajasti käytössä Suomen kouluissa ja antavat tutkimukselle riittävät lähtökohdat lähteä tutkimaan murtolukujen oppisisältöjä Suomen alakoulujen oppikirjoissa.

Sisällönanalyysin suorittaminen valitulle tutkimusmateriaalille onnistui ongelmitta. Tutkimusmateriaaliin tutustuminen perusteellisesti ennen sisällönanalyysissä etsittävien sisältöjen asettamista osoittautui myös hyväksi päätökseksi. Tämä auttoi valitsemaan tutkimukselle sopivat aineistolähtöiset kysymykset sisällönanalyysiin, jotta löydetyistä tuloksista saatiin myös mahdollisimman merkityksellisiä tutkimukselle.

Kokonaisuudessaan tutkimukseni pystyi vastaamaan asettamiini tutkimuskysymyksiin sisällönanalyysin avulla kiitettävästi. Onnistuneet valinnat etsittävästä sisällöstä ja aineistosta saadut analysoitavat tulokset johtivat merkityksellisiin päätelmiin tutkimuskysymyksiin liittyen. Asettamani tutkimuskysymykset eivät tarkoituksenmukaisesti käsitelleet, kuinka hyviä tuen keinoja oppikirjasarjat tarjoavat murtolukujen parissa, sillä näiden tuen keinojen hyvyden tai huonouden arviointi on hyvin subjektiivista, eikä myöskään tämän tutkimuksen tarkoitus. Sisällönanalyysissä onnistuin etsimään etsittävät tuen keinot oppikirjoista objektiivisesti ja aineistolähtöisesti, ja esittämään nämä erilaiset tuen keinot oppikirjasarjoissa. Näiden tuen keinojen analysoinnin lisäksi pystyin määrittelemään mitä tuen keinoja oppikirjoissa voitaisiin vielä lisätä. Toisen tutkimuskysymykseni mukaisesti analysoin näitä tuen keinojen merkityksellisyyttä erilaisille oppijoille ja arvioin löytämäni tuen keinojen monimuotoisuutta onnistuneesti, esittämällä myös kehitysehdotuksia kirjasarjoille tuen keinojen monipuolistamiseksi.

Sisällönanalyysini onnistumista voin käsitellä myös arvioimalla sen toistettavuutta ja objektiivisuutta. Tutkimukseni toistettavuus onnistuu hyvin tutkimuksessa suorittamani tarkkojen rajoitusten takia. Onnistuin rajaamaan tutkittavat sisällöt ensisijaisesti murtolukukappaleiden oppinurkkauksiin ja opetusosioihin, huomioimalla myös toiminnalliset ekstrakappaleet oppikirjoissa. Toisaalta käsitellessäni tutkimuksessani kappaleista löytyviä tehtäviä vain pintapuolisesti valitsimieni sisällönanalyysin sisältöjen näkökulmasta, enkä täydellisesti käymällä niitä läpi, voi tämä hieman vaikeuttaa tutkimukseni absoluuttista toistettavuutta. Tutkimukseni objektiivisuutta arvioin onnistuneeksi. Sisällönanalyysin tuloksista vedetyt johtopäätöksissä on käytettävä tietynlaista varovaisuutta, jota olen onnistunut tutkimukseni pohdintakappaleessa seuraamaan. Tuloksieni ollessa laadullisesti listauksia erilaisista tuen keinoista, en lähtenyt subjektiivisesti arvioimaan kirjasarjojen paremmuutta tai tuen keinojen paremmuutta suhteessa toisiinsa.

Tutkimuksen laajuutta olisi voinut lisätä myös analysoimalla kaikkien näiden kappaleiden tehtäviä tarkemmin. Huomioin erilaisia tehtävämalleja sisällönanalyysissä vähäisesti tarkoituksella, ensisijaisesti vain nostamalla analyysille olennaiseksi tuloksiksi vain tehtävissä löytyviä murtolukujen esittämistapoja ja arkielämän linkkejä. Oppimisen tuen keinoiksi oppikirjojen tehtävät voivat tarjota esimerkiksi tehtävien haastavuuden skaalaimista, mahdollisia syventäviä lisätehtäviä, sekä toiminnallisia tai oppiainerajoja ylittäviä tehtäviä. Kirjasarjojen kaikkien tehtävien analysoiminen olisi kuitenkin lisännyt tämän tutkimuksen laajuutta huomattavasti ja vaatinut huomattavan määrän aikaa tutkimuksen toteuttamisesta.

Pystyin liittämään myös tutkimukseni onnistuneesti aiempaan tutkimukseen, sekä käsittelemään tuloksiani pohdintaosiossa merkityksellisesti niin kirjasarjoja hyödyntävän oppilaan ja opettajan näkökulmasta, mutta myös löytämään muutamissa kohdissa kirjasarjoihin erilaisia kehittämisen kohteita.

5.4 Pohdintaa jatkotutkimukseen liittyen

Pohdintakappaleessani kävin jo läpi tutkimukseni merkityksellisyyttä kirjasarjoja käyttäville opettajille ja oppilaille, mutta myös käsitelin erilaisia kehityskeinoja tulevaisuuden oppimateriaaleille, joita kirjasarjat voisivat hyödyntää tulevaisuudessa. Tutkimukseni toimii kuitenkin myös osaltaan pohjatutkimuksena tulevaisuuden murtolukututkimukselle etenkin matematiikan oppikirjojen parissa sekä murtolukujen opettamisen tuen keinojen

parissa. Suomen kouluissa käytettävissä oppikirjoissa murtolukujen oppimisen tuen keinot ovat tämän tutkimuksen perusteella hyvissä lähtökohdissa lähteä kehittämään yhä monipuolisempia oppimateriaalin tuen keinoja erilaisille oppilaille. Tulevaisuudessa tutkimusta voisi suorittaa etenkin erilaisten tuen keinojen tehokkuuteen liittyen, jotta kirjasarjat pystyvät kehittämään kirjasarjojaan yhä tehokkaammiksi oppimisen apuvälineiksi.

Tässä tutkimuksessa en perehtynyt kirjasarjojen murtolukuaiheisiin tehtäviin kuin pinta-puolisesti huomioimalla niissä esiintyviä murtolukujen esitystapoja ja arkielämän linkityksiä. Yksi mahdollinen näkökulma tulevaisuuden murtolukututkimukseen voisi myös olla tarkempi perehtyminen erilaisiin tehtävämalleihin, niiden erilaisiin oppimisen tukemisen keinoihin sekä niiden tehokkuuteen oppimisen apuvälineenä. Harjoitustehtävien tekeminen on edelleen suurena painopisteenä monessa koulussa matematiikan sisältöjen oppimisessa ja jatkuva tutkimus näihin oppimiselle olennaisille työvälineille voisi tuottaa edelleen yhä tehokkaampia oppimateriaaleja matematiikan oppimiseen. Tästä jatkaen, tutkimus, joka linkittäisi opetusnurkkausten opetusosion ja monipuoliset tuen keinot tehtäväosiossa voisi auttaa kehittämään tulevaisuuden oppimateriaaleja yhä tehokkaammiksi.

Kokonaisuudessaan, murtolukujen oppimisen tutkimusta voitaisiin yhä laajentaa oppimisen teoriasta enemmänkin kohti oppimateriaalien tutkimusta. Tämä laajasti tutkittu matemaattisen osaamisen osa-alue on saanut reilusti huomiota viime vuosikymmeninä pedagogisen tutkimuksen alalla ja oppimateriaalien edelleen suurta merkityksellisyyttä matematiikan opetuksessa ei tule vähätellä.

- Allinson, C., & Hayes, J. The cognitive style index. *Journal of Management Studies*, 33, 119–135, 1996
- Atjonen, Päivi & Uusikylä, Kari: Didaktiikan perusteet. *I. painos. Porvoo: WSOY*, 1999
- Avgerinou I Vana A. & Tolmie Andrew: Inhibition and cognitive load in fractions and decimals, *British Journal of Educational Psychology*, 2019
- Behr M, Lesh R, Post T, et al. Rational number concepts. *Acquisition of mathematics concepts and processes. New York (NY): Academic Press*, p. 91–126, 1983
- Brissiaud, R. Les fractions et les décimaux au CM1. Une nouvelle approche. *Actes du XXVème Colloque des Formateurs et Professeurs de Mathématiques chargés de la Formation des Maîtres*, (IREM de Brest), 147-171, 1998
- Collier Myrtie. Learning fractions. *School science and mathematics*. 1922
- Coffield, F., Moseley, D., Hall, E. & Ecclestone, K. Learning styles and pedagogy in post-16 learning: a systematic and critical review. *London: Learning and Skills Research Centre*. 2004
- Dunn, R., Dunn, K., & Price, G. E. Learning style inventory. *Lawrence, KS: Price Systems*, 1984
- Empson SB. Low-performing students and teaching fractions for understanding: an international analysis. *J Res Math Educ*. 34(4):305–343, 2003

- Gabriel Florence, Coché Frédéric, Szucs Dénes, Carette Vincent, Rey Bernard & Content Alain. A componential view of children's difficulties in learning fractions, *Frontiers Psychol.*, 2013
- Grégoire, J. Aux Sources des Difficultés de L'apprentissage des Fractions. Brussels: *Seminar given at, Univerisité Libre de Bruxelles*, 2008
- Hansen Nicole, Nancy C. Jordan Nancy C. & Rodrigues Jessica: Identifying learning difficulties with fractions: A longitudinal study of student growth from third through sixth grade, *School of Education University of Delaware Newark*, 2015
- Hart KM. Children understanding of mathematics: 11–16. *Oxford: Northampton*; 1981.
- Honey, P., & Mumford, A. The manual of learning styles. *Maidenhead, England: Peter Honey Publications*, 1992
- Hugues Lortie-Forgues, Jing Tian & Robert S. Siegler: Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *University of York, UK Carnegie Mellon University, USA*, 2015
- Husmann, P. R., & O'Loughlin, V. D. Another nail in the coffin for learning styles? Disparities among undergraduate anatomy students' study strategies, class performance, and reported VARK learning styles. *Anatomical sciences education 12: 1, 6–19*. 2019
- Mamede, E., Nunes, T., & Bryant, P. The equivalence and ordering of fractions in part-whole and quotient situations. *PME Conference, Vol 29, 3*, 2005
- Maysen-Clay Tandi, *Teaching Maths to Pupils with Different Learning Styles, SAGE*, 2005
- Namkung Jessica & Fuchs Lynn. Remediating Difficulty with Fractions for Students with Mathematics Learning Difficulties, *Learning Disabilities: A Multidisciplinary Journal, Volume 24, Number 2*, 2019
- Ni, Y., & Zhou, Y.-D. Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist, 40(1)*, 27–52. 2005

- Opetushallitus. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014
- Rodrigues Jessica, Locke Shannon, Singell Emily L. & Mirielli Lindsey G.: Teaching Fraction Magnitude Using the Number Line, *Intervention in School and Clinic* 1–8, 2023
- Rouche, N. L'esprit des Sciences. Pourquoi ont-ils Inventé les Fractions? Paris: Ellipses, 1998
- Siegler Robert S, Fazio Lisa K., Bailey Drew H., Zhou Xinlin. Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Department of Psychology, Carnegie Mellon University, USA*, 2012
- Siegler Robert S., Duncan Greg J., Davis-Kean Pamela E., Duckworth Kathryn, Claessens Amy, Engel Mimi, Susperreguy Maria Ines & Chen Meichu. Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychol. Sci.* 23, 691–697, 2012
- Siegler Robert S & Pyke Aryn A. Developmental and Individual Differences in Understanding of Fractions, *Developmental Psychology*, 49, 2013
- Singh Parmjit, Hoon Teoh Sian, Nasir Nurul Akmal, Cheong Tau Han, Syazwani Rasid, Boon Joseph & Hoong Zik: Obstacles faced by students in making sense of fractions, *Faculty of Education, Universiti Teknologi MARA Selangor, Malaysia*, 2020
- Tsung-Lung Tsai & Hui-Chuan Li: Towards a framework for developing students' fraction proficiency, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 2016
- Tuominen Anu. Interventiotutkimus kolmasluokkalaisten murtolukujen oppimisesta. ”Ylhäällä olevat vaan plussataan”, *Turun yliopiston julkaisuja, Annales Universitatis Turkuensis sarja, SERB. B OSA – TOM. 534*, 2021
- Van Hoof Jo, Vamvakoussi Xenia, Van Dooren Wim & Verschaffel Lieven: The Transition from Natural to Rational Number Knowledge, *Acquisition of Complex Arithmetic Skills and Higher-Order Mathematics Concepts*, 2017

Wulandari Dwi & Mohammad Faizal Amir: Analysis of Elementary School Students' Difficulties in Fraction Addition, *K R E A N O Creative-Innovative Mathematics (education) Journal*, 2022

Willingham, D. T., Hughes, E. M. & Dobolyi, D, G. The scientific status of learning styles theories. *Teaching of Psychology* 42: 3, 266–271, 2014