KIELENTÄMISEN MERKITYS OPPILAIDEN MATEMAATTISESSA AJATTELUSSA

Annu Hartikainen

Pro gradu -tutkielma
Helmikuu 2020
Fysiikan ja matematiikan laitos
Itä-Suomen yliopisto

Annu Hartikainen	Kielentämisen merkitys oppilaiden matemaattisessa ajattelussa, 45 sivua
	Itä-Suomen yliopisto
	Matematiikan koulutusohjelma
	Matematiikan aineenopettajakoulutus
Työn ohjaaja	Yliopistonlehtori Antti Viholainen

Tiivistelmä

Tutkielman tarkoituksena on tarkastella, kuinka oppilaat ilmaisevat matemaattista ajatteluaan kielentämisen näkökulmasta matematiikan tehtäviä ratkaistaessa. Matemaattisen ajattelun katsotaan koostuvan matemaattisen tiedon prosessoinnista, jolloin oppilaiden matemaattista ajattelua havainnoidaan proseduraalisen-, konseptuaalisen- ja strategisen tiedon kannalta. Tämän lisäksi tarkastellaan oppilaiden matemaattisen ajattelun suullista ja kirjallista ilmaisua luonnollisen kielen, symbolikielen ja kuviokielen avulla. Tarkoituksena on havainnoida kuinka oppilaat käyttävät eri kieliä ja toimivat niiden välillä.

Tutkimus toteutettiin tehtäväpohjaisena parihaastatteluna, jonka aikana oppilasparit ratkaisivat neljä yhtälöihin tehtävää. Tutkimukseen osallistui yhteensä 12 kahdeksannen luokan oppilasta eli kuusi oppilasparia. Haastattelut videoitiin, jonka jälkeen videot ja vastauspaperit analysoitiin teorialähtöisen tutkimuksen mukaisesti.

Tulokset osoittavat, että oppilaiden välistä suullista kielentämisestä seuraamalla sekä tehtävien rakenteiden avulla saadaan hyvä käsitys oppilaiden käyttämistä matemaattisista menetelmistä sekä siitä, kuinka hyvin oppilaat ymmärtävät ja osaavat perustella toimintonsa. Lisäksi tutkimustulokset osoittavat, että oppilaiden taidoissa hyödyntää luonnollista kieltä, symbolikieltä sekä kuviokieltä osana tehtävien ratkaisua on vielä kehitettävää. Havaittiin, etteivät oppilaat juurikaan hyödyntäneet kuviokieltä ja symbolikielen hallinnassa oli eroavaisuuksia. Oppilailla oli myös hankaluuksia luonnollisen kielen kääntämisessä matematiikan symbolikielelle.

Esipuhe

Vihdoin maaliviiva häämöttää ja on aika jättää opiskelijaelämä taakse. Gradun kirjoittaminen on ollut viimeinen ponnistus opinnoissa ja nyt sekin on ohi. Näin n:nnen vuoden opiskelijana se tuntuu helpottavalta mutta samalla haikealta.

Monen vuoden opintoihin on mahtunut paljon hyviä ja ikimuistoisia hetkiä. Niistä suuret kiitokset ansaitsevat kaikki opiskelukaverini sekä ystäväni. Lisäksi haluan erityisesti kiittää rakasta kihlattuani Santeri Räsästä. Hänen kannustuksensa ja uskonsa minuun ovat auttaneet viemään opintoni loppuun asti. Samalla hänen huumorintajunsa on tuonut naurua ja iloa jokaiseen päivään, varmasti myös jatkossakin.

Lopuksi haluan kiittää Antti Viholaista ohjauksesta ja neuvoista gradun aiheen suunnittelusta aina lopulliseen tuotokseen asti.

Joensuussa 20. helmikuuta 2020 *Annu Hartikainen*

Sisältö

Luku I
Johdanto

Helsingin sanomat julkaisi vuoden 2019 kiinnostavimpien sekä puhuttaneimpien artikkeleiden joukossa jutun, joka käsitteli kiinalaisten lasten matematiikan tehtäviä (ks. Pajari, 2019). Tehtävät olivat rakenteeltaan suomalaisille uuden tyylisiä verraten suomessa totuttuihin matematiikan tehtäviin. Artikkelissa julkaistuissa kuusivuotiaille lapsille tarkoitetuissa matematiikan tehtävissä pyydettiin oppilaita muodostamaan peruslaskutoimituksia annetuista kuvista ja kuvapareista. Tehtävien tarkoituksena oli kehittää lasten matemaattista ajattelua luovalla tavalla tehtävien ollessa avoimia ja antaen oppilaiden itse muodostaa niistä tulkintoja. Suomalaisissa oppikirjoissa tehtävät tuntuvat koostuvan paljolti valmiiksi ennalta annetuista tehtävänasetteluista. Tällöin tehtävän ratkaisuun tarvitaan mahdollisesti vain ennalta opeteltuja sääntöjä ja menetelmiä, laskutoimitusten käyttöä niitä kuitenkaan ymmärtämättä.

Perinteisesti matematiikan tehtävien ratkaisut koostuvan suurelta osin luvuista ja laskutoimituksista, symboleilla esitetyistä merkinnöistä. Kuitenkin kieleen ja ilmaisuun kuuluvat myös muut merkintätavat, kuten puhe eli luonnollinen kieli, ilmeet ja eleet sekä kuvat ja kuviot (Joutsenlahti, 2003a). Nykyään sähköistyneiden ylioppilaskokeiden myötä matematiikan tehtävien ratkaisut voidaan esittää ottamalla kuvakaappaus laskinsovelluksella tehdyistä laskuista ja merkinnöistä. Ylioppilastutkintolautakunnan antamien hyvän vastauksen määräyksien mukaan vastauksesta on kuitenkin tultava ilmi perustelut ja selitykset, kuinka kokelas on päätynyt antamaansa vastaukseen (Ylioppilastutkintolautakunta, 2019). Pelkäksi vastaukseksi ei siis riitä laskutoimitukset, vaan ratkaisun vaiheita on kuvattava myös joko sanallisesti tai käyttämällä hyödyksi kuvia ja kuvioita.

Kaikki edellä mainitut tilanteet liittyvät matemaattiseen ajatteluun ja sen ilmaisun eri keinoihin. Tällaista matemaattisen ajattelun selittämistä kielen keinon, pääsääntöiseesti suullisesti tai kirjallisesti, kutsutaan matematiikan kielentämiseksi. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (POPS) 2014 (Opetushallitus, 2016) puhutaan monilukutaidosta, jolla tarkoitetaan erilaisten tekstien tulkitsemis- ja tuottamistaitoja. Matematiikan kielentämisen voidaan katsoa kuuluvan osaksi monilukutaitoja, joiden avulla oppilas osaa tuottaa ja esittää tietoa eri muodoissa. Monilukutaitoja tulee kehittää kaikissa oppiaineissa, joten matematiikan osalta opetuksen tulisi tarjota oppilaille keinoja ilmaista itseään ja matemaattista ajatteluaan monipuolisesti niin yksin kuin ryhmässä.

Matematiikan kielentämisen tarkoituksena on tarjota monipuolisia tapoja ilmaista omaa ajatuksen juoksua toisille ymmärrettävässä muodossa. Kielentäminen onkin vahvasti läsnä POPS:ssa (Opetushallitus, 2016) koko ala- ja yläkoulun ajan. Matematiikan osalta vuosiluokkien 1-2 aikana on tarkoitus kehittää ja tukea oppilaan matemaattisen ajattelun ilmiasua hyödyntäen kielen eri keinoja. Vuosiluokilla 3-6 matematiikan työskentelyn taitojen mukaisesti oppilaita kannustetaan matemaattisen ajattelun esittämiseen puheen, kirjallisten tuotosten, käsin kosketeltavien materiaalien sekä kuvioiden avulla. Yläkoulussa vuosiluokilla 7-9 matematiikan yhtenä opetuksen tavoitteena on oppilaan matemaattisen ajattelun kehittyminen ja matematiikan kielentämisen harjoittelu suullisesti sekä kirjallisesti. Samoin matematiikan tavoitteiden yksi sisältöalue käsittelee ajattelun taitoja, joiden avulla on tarkoitus harjoitella tekstin tulkintaa ja tuottamista sekä perustelun taitoja. Lisäksi matematiikan opetuksen tarkoituksen on tukea oppilaiden kykyjä hahmottaa suurempia kokonaisuuksia sekä muodostaa yhteyksiä opittujen asioiden välille.

Myös lukion opetussuunnitelman perusteissa (LOPS) (Opetushallitus, 2015) yhtenä matematiikan opetuksen tehtävistä on opettaa oppilasta ilmaisemaan matemaattista ajatteluaan puhutun ja kirjoitetun kielen avulla. Opiskelijoita rohkaistaan esittämään matemaattista tietoa monipuolisesti hyödyntäen ilmaisussaan kuvioita sekä piirroksia. Tämän lisäksi opiskelijoiden matemaattista ajattelua pyritään kehittämään siten, että matemaattiset käsitteet saavat ymmärrettävän merkityksen, jonka avulla niitä pystytään liittämään laajempiin matematiikan kokonaisuuksiin.

Suomessa matematiikan kielentämistä on tutkittu etenkin Jorma Joutsenlahden toimesta. Joutsenlahti on tutkinut väitöskirjassaan (Joutsenlahti, 2005) lukiolaisten matemaattisen ajattelun piirteitä. Tämän lisäksi hän tehnyt paljon tutkimusta matemaattisesta ajattelusta sekä kielentämisestä ja kielentämisen hyödyistä matematiikan opiskelussa (muun muassa Joutsenlahti, 2003b, 2004, 2010). Kielentämisestä on tehty myös kandidaatin- sekä pro gradu -tutkielmia, joissa matematiikan kielentämistä on tutkittu aina alakoulusta yliopisto-opiskelijoiden keskuuteen. Esimerkkeinä tutkimuksista mainittakoon Mansikka-Ahon ja Sirénin (2012) pro gradu -tutkielma matematiikan suullisesta kielentämisestä alakoulussa sekä Silja Ojasen (2016) pro gradu -tutkielma kirjallisesta kielentämisestä yliopistossa. Tutkimustuloksille yhteistä on kielentämisestä saadut hyödyt. Matematiikan kielentämisestä vaikuttavat hyötyvän niin oppilaat itse, kanssaopiskelijat sekä opettaja (muun muassa Joutsenlahti 2003b).

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan oppilaiden matemaattisen ajattelun ilmentymistä kielentämisen näkökulmasta. Tutkimus on ajankohtainen ottaen huomioon opetussuunnitelmissa (POPS, LOPS) esiintyvät matematiikan opetuksen ja oppimisen tavoitteet. Tämän lisäksi pinnalla oleva keskustelu matematiikan tehtävien rakenteesta ja monimuotoisuudesta (Pajari, 2019) sekä matematiikan kielentämisestä tehtyjen tutkimusten osoittamat kielentämisestä saadut hyödyt tukevat tutkimuksen mielekkyyttä. Tässä tutkielmassa matemaattisen ajattelun katsotaan rakentuvan oppilaiden taidoista käyttää matemaattisia menetelmiä ja sääntöjä osana ongelmanratkaisua sekä oppilaiden kyvyistä ymmärtää käyttämiään toimintojaan. Tutkimuksessa havainnoidaan oppilaiden matemaattisen ajattelun ilmentymistä edellä mainitun matemaattisen tiedon näkökulmasta. Tämän lisäksi tutkimuksessa tarkastellaan oppilaiden tapoja esittää omia ajatuksiaan eri kielen keinoin. Kielen katsotaan koostuvan kirjallisesta sekä puhutusta kielestä, matemaattisista symboleista sekä kuvista ja kuviosta.

Luku II

Teoria

2.1 Matemaattinen ajattelu

Matemaattinen ajattelu määritellään monella eri tavoin riippuen kirjoittajan näkökulmasta. Näkökulmiin vaikuttavat tutkimuslähtökohdat, joten matemaattiselle ajattelulle ei ole vakiintunutta käsitteen määritelmää. (Joutsenlahti, 2003b) Seuraavaksi esitellään muutamia erilaisia näkökulmia matemaattisen ajattelun määrittelylle.

Matemaattinen ajattelu voi koostua aiempien kokemuksen säätelevistä idea- ja ajatusketjuista. Psykologisen näkökulman mukaan ajattelu koostuu kahden erillisen, mahdollisesti aiemmin opitun, asian yhteyksistä. Ajattelu voidaan mieltää myös yrityksen ja erehdyksen kautta muodostuvaan yhteyksien ymmärtämiseen. Tällaiseen määrittelyyn voidaan lisätä vielä ymmärtäminen, joka kuvaa matemaattisten laskumenetelmien hallintaa sekä kieli. Nämä kaikki kolme ovat tiivisti yhteydessä toisiinsa sekä oppimiseen. (Leppäaho, 2007)

Yrjönsuuren (2004) mukaan matemaattiseksi tiedoksi mielletään perinteiset matemaattiset tosiasiatiedot, kuten luvut, määritelmät sekä kaavat. Toiminnallista tietoa käytetään tehtävien ratkaisuissa ja se koostuu tosiasiatiedoista sekä erilaisten taitojen oppimisesta ja harjoittelusta saaduista kokemuksista. Matemaattinen ajattelu kytkeytyy siis kognitiivisen taidon käyttämiseen ja matemaattinen toiminta jakaantuu algoritmiseen ja reflektoivaan ajatteluun.

Algoritminen ajattelu kuvastaa taitotietoa, joka esiintyy kognitiivisen taidon käytössä. Tämä tapahtuu esimerkiksi, kun verbaalisen lauseen esitysmuotoa täsmennetään tai käännetään symboliselle kielelle ja päinvastoin. Tällaiseen toimintaan liittyvät

Yrjönsuuren (2004) mukaan oikeiden operaatioiden valinta sekä niiden vaikutusten tietäminen, eli taito toimia tietyllä tavalla. Algoritmisen ajattelun on tarkoitus tarjota ratkaisuun tarvittavia keinoja ja työkaluja sekä antaa välineitä tulosten hyödyntämiseen.

Reflektoivaa ajattelua kuvastaa pohdiskeleva tyyli, joka mahdollistaa oivallukset deduktiivisten päätelmien teossa. Tähän liittyy yksilön oman toiminnan suuntaaminen, kuinka itsenäisesti hän toimii ja paljonko hän peilaa toimintaansa omiin kokemuksiin ja arviointeihin. Reflektoivaa ajattelua kuvaa koettelu sekä oppijan vakuuttuminen tekemistään valinnoista ja ratkaisujen perusteista (Yrjönsuuri, 2004).

Joutsenlahti (2003b) esittelee Sternbergin (2003) näkökulman, jossa matemaattista ajattelua lähestytään viidestä eri näkökulmasta tutkimislähtökohtien mukaan. Psykometrinen lähestymistapa keskittyy oppijan matemaattisiin kykyihin, kun informatiivinen prosessointia tutkiva liittyy oppilaan mentaalisiin prosesseihin sekä matemaattisiin ongelmanratkaisutaitoihin. Antropologinen lähestymistapa tutkii kulttuurin vaikutusta matemaattiseen ajatteluun, pedagoginen lähestymistapa keskittyy oppimisen ohjaamiseen sekä sosiaalisiin suhteisiin ja tiedematemaattinen lähestymistapa lähestyy matemaattista ajattelua itseluottamuksen ja uskomusten kautta.

Joutsenlahti (2003b) soveltaa kielen ja ajattelun tutkimuksessaan prosessiluonnetta korostavaa lähestymistapaa. Oppilaiden ajatusprosessit matematiikan opiskelussa ovat kiinnostaneet tutkijoita kautta aikojen. Ajatusprosessin kulkua ja sen sisältöä on pyritty mittaamaan testeillä ja arvioimaan sen oikeellisuutta tulosten avulla.

Matemaattisessa ajattelussa oppimiseen vaikuttaa merkittävästi prosessoitavan tiedon luonne. Ajattelun tutkimuksissa matemaattinen tieto voidaan jakaa Hiebertin (2003) ja Lefren (2003) mukaan proseduraaliseen ja konseptuaaliseen tietoon. (Joutsenlahti, 2003b). *Proseduraalinen tieto* määritellään menetelmätietona, jonka avulla oppilas osaa suorittaa tehtäviä asiaankuuluvien menetelmien ja sääntöjen avulla. Toimintojen suorittaminen ei välttämättä vaadi oppilaalta tietoista ymmärtämistä, jos tekeminen on automatisoitunut. Menetelmät ja säännöt koostuvat matemaattisten symbolien tunnistamisesta sekä proseduurien ja algoritmien, eli matemaattisten operaatioiden suoritusjonojen käytöstä. Suurin ero proseduraalisen ja konseptuaalisen, eli käsitteellisen tiedon välillä on se, että *konseptuaalinen tieto* vaati oppilaalta tietoista ymmärtämistä. Konseptuaalista tietoa käyttäessä oppilas osaa tiedostaa ja perustella toimintonsa ja hyödyntää tietoverkkojaan tehtävien tulkitsemiseen. (Leppäaho, 2007; Haapasalo, 2005; Joutsenlahti, 2005)

Edellä mainittu luokittelu ei ole Joutsenlahden (2005) mukaan täydellinen, koska kaikki tieto ei yksiselitteisesti sulaudu proseduraaliseksi tai konseptuaaliseksi. Tämän vuoksi hän lisää ryhmittelyyn *strategiatiedot*, jotka kuvaavat ongelmanratkaisussa käytettäviä strategioita. Strategiat ohjaavat ja kontrolloivat henkilön kognitiivisia prosesseja, joiden säätelyyn vaikuttavat metakognitiot. Algoritmien sekä matemaattisten lauseiden ja käsitteiden käyttö ovat matemaattisissa strategioissa tarvittavia menetelmiä. Haapasalo (2005) käyttää termiä heuristiset prosessit kuvatessaan strategioita ja niiden valintaan vaikuttavia metakognitioita.

Tässä tutkimuksessa sovelletaan Joutsenlahden painottamaa prosessiluonnetta korostavaa näkökulmaa matemaattiseen ajatteluun, jossa matemaattisen tiedon eli proseduraalisen-, konseptuaalisen- tai strategisen tiedon prosessointia ohjaavat ajattelijan metakognitiot.

2.2 Ongelmaratkaisu matematiikassa

Tutkijoilla on erilaisia käsityksiä ongelmatilanteen määrittelystä. Pedagogiselta kannalta katsottuna Haapasalo (2005) esittää seuraavanlaisen määritelmän: ongelmaksi voidaan mieltää tilanne, jossa on havaittavissa loogis-kognitiivinen konflikti, jonka ratkaiseminen vaatii henkilöltä tavoitteellista ajattelutoimintaa. Pehkonen (2009) puolestaan pitäytyy laajemmalti käytetyssä Kantowskin (2009) määritelmässä, jonka mukaan ongelmaksi luokitellaan tehtävä, mikäli sen ratkaisemisessa täytyy soveltaa uudella tavalla jo olemassa olevaa tietoa. Jos tehtävän ratkaisemiseen tarvittavat toimenpiteet ovat ennestään tuttuja, kyseessä on rutiinitehtävä eikä ongelma. Ongelma on siis kytköksissä sitä ratkaisevaan henkilöön ja aikaan (Leppäaho, 2007). Haapasalo (2005) kutsuu ongelmatilanteessa tarvittavia strategioita ja niiden valintaa sääteleviä metakognitioita heuristisiksi prosesseiksi. Ongelma ja heuristiset prosessit ovat siis riippuvaisia toisistaan ja määriteltävissä vain toistensa kautta.

Ongelmatehtävät ovat luokiteltavissa avoimiin ja suljettuihin (Leppäaho, 2007; Haapasalo, 2005). Luokittelu perustuu ongelmassa annettuun tiedon luonteeseen. Suljetussa ongelmassa ongelmanasettelussa on annettu vain tarpeellinen ja eksakti tieto ja näin ollen ratkaisun eteneminen ja välivaiheet ovat ennalta arvattavissa. Suljetut ongelmat keskittyvät esimerkiksi ratkaisijan älyllisten prosessien- ja oppilaan ratkaisurutiinien kehittämiseen. (Haapasalo, 2005) Avoin ongelma puolestaan antaa ratkaisijalle mahdollisuuden vaikuttaa ratkaisuprosessiin. Ratkaisija voi tuoda tehtävään lisäoletuksia ja näin ollen vaikuttaa alku- tai lopputilanteeseen. Avoimilla tehtävillä on usein monia eri ratkaisuja, kaikkien ollessa kuitenkin yhtä oikeita. (Pehkonen, 2003) Avoimet ongelmat liittyvät muun muassa arkielämän ongelmiin ja tiimityön avulla pyritään kehittämään sosiaalisia taitoja (Haapasalo, 2005).

Ongelmanratkaisulla tarkoitetaan Haapasalon (2005) mukaan prosessia, jota voidaan esimerkiksi kuvata 1900-luvun matemaatikon George Polyan esittämällä ongelmanratkaisuprosessilla. Polyan ongelmanratkaisuprosessi muodostuu ongelman ymmärtämisestä ja siihen orientoitumisesta, ratkaisusuunnitelman laatimisesta eli ongelman työstämisestä, suunnitelman toteuttamisesta ja ongelman ratkaisusta sekä lopuksi ratkaisun tarkastelusta ja tulkinnasta. Ongelman ymmärtäminen tarkoittaa ongelman löytämistä eli ongelmatilanteen tiedostamista, mahdollisesti myös ongelman uudelleen muotoilemista. Ratkaisusuunnitelman laatiminen vaatii ongelman ja lähtötietojen analysointia, välitavoitteiden määrittelyä sekä ratkaisuidean löytämistä. Ratkaisusuunnitelman toteuttamisen aikana henkilö suorittaa operaatioita, jotka auttavat ratkaisun määrittämisessä ja lopulta koko ongelman ratkaisun esittämisessä. Viimeisenä mallissa on prosessin tulkinta, jonka tarkoitus on varmistaa ratkaisun oikeellisuus ja syventää ongelmanratkaisuprosessin merkitystä. (Haapasalo, 2005)

Polyan ongelmanratkaisumalli on yksi tunnetuimpia yleisen ongelmanratkaisun malleista. Malleja on olemassa useita, ja ne painottavat ongelmanratkaisuprosessin eri vaiheita ei tavalla. Yhteistä malleille on prosessin kuvaaminen tietynlaisena vaiheiden jatkuvana suorittamisena, jonka lopputulemana on oikeaan ratkaisuun päätyminen. (Leppäaho, 2007)

Ongelmanratkaisustrategia on valintapäätös ennalta opittujen ongelmanratkaisukeinojen ja työtapojen välillä, joiden avulla tavoitellaan ongelman ratkaisua. Ongelmanratkaisustrategioiden valinta tapahtuu Polyan mallissa ratkaisusuunnitelman laatimisen ja sen toteuttamisen aikana. (Leppäaho, 2007) Haapasalo (2005) esittelee kahdeksan tutkimuskirjallisuudesta löytynyttä ongelmanratkaisustrategiaa, jotka ovat:

- yleisten päättelysääntöjen käyttäminen
- synteesi

- analyysi
- matriisimenetelmä
- luova ajattelu
- arvaa-todista menetelmä
- algoritminen menetelmä
- mallien konstruointi.

Ensimmäinen ongelmanratkaisustrategia on yleisten päättelysääntöjen käyttäminen eli johtopäätösten tekeminen tunnettujen tosiasioiden perusteella. Tällaisen strategian käyttäminen on miltei välttämätöntä esimerkiksi matemaattisissa ongelmissa. Seuraavat ongelmanratkaisustrategiat ovat synteesi sekä analyysi. Synteesi on eteenpäin työstämistä, missä asiat liitetään tiettyyn järjestykseen, joka on sen hetkisen tosiasioiden ja päättelyn mukainen. Synteesin tavoitteena on päätyä vielä sillä hetkellä tuntemattomaan tulokseen. Analyysi on puolestaan taaksepäin työstämistä, joka tarkoittaa ratkaisun löytämistä tietystä päämäärästä käsin ja siten tehtävässä etenemistä. Analyysiä ja synteesiä voidaan käyttää myös yhdessä.

Neljäntenä ongelmanratkaisustrategiana Haapasalo (2005) kuvaa systemaattisten vaihtoehtojen käytön eli matriisimenetelmän. Siinä ongelman tiedot pyritään esittämään helpoiten nähtävissä olevassa muodossa, joka voidaan tehdä systemaattisesti käyttämällä matriisia. Tämän strategian vastakohtana on luova ajattelu, jossa aivojen annetaan vapaasti luoda ajatuksia ja assosiaatioita annettuihin lähtötietoihin. Tätä kutsutaan termillä brainstorming. Kuudes strategia on tieteellinen arvaa-todista menetelmä, jossa rationaalisen hypoteesin kautta syntynyt tulos todistetaan oikeelliseksi tieteellisten menetelmien avulla. Algoritminen menetelmä on ongelmanratkaisustrategiana järjestelmällisten operaatioiden toteuttamista ennalta määrättyjen sääntöjen mukaisesti. Algoritmit voivat olla matemaattisin menetelmin johdettuja ja niiden löytämiseen tarvitaan mahdollisesti oivallusta ja ongelman mallintamista. Kahdeksas ongelmanratkaisustrategia on mallien konstruointi ja analogioiden havaitseminen.

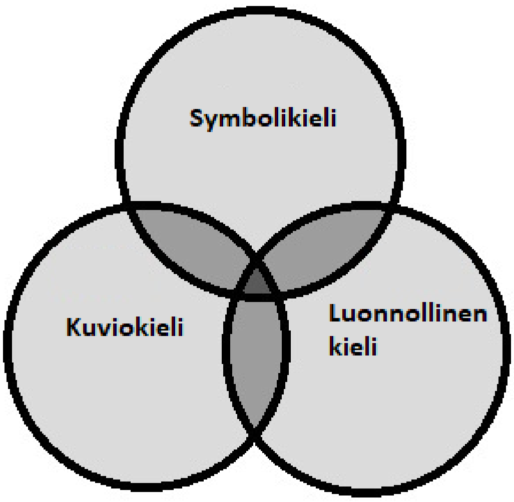
Ongelmanratkaisussa yksilön on tuotava ilmi ajattelutoimintaansa, jonka avulla hän päätyy ratkaisuun. Seuraavaksi käsitellään matemaattisen ajattelun ilmaisun keinoja kielen avulla.

2.3 Matemaattisen ajattelun kielentäminen

Kielen voidaan kuvata koostuvan symboleista eli merkeistä, joilla on tietty sisällys ja muoto (Koppinen;Lyytinen ;& Rasku-Puttonen, 1989). Kielen eri muotoja ovat kirjoitettu ja puhuttu kieli sekä ilmeet ja eleet. Tämän lisäksi esimerkiksi matematiikassa käytetyt matemaattiset symbolit ovat osa kieltä. (Joutsenlahti, 2003a)

Nykysuomen sanakirjan mukaan kielentäminen on ajatusten esittämistä kielellisessä muodossa (Joutsenlahti & Rättyä, 2015). Ainedidaktisessa tutkimuksessa Joutsenlahti (2003a) kuvaa kielentämistä osana oppilaan konstruointiprosessia. Matemaattista käsitettä ilmaistessaan oppilaan tulee jäsentää ja kuvata omaa matemaattista ajatteluaan siten, että hän pystyy tunnistamaan käsitteen keskeiset piirteet. Samalla muut oppilaat rakentavat keskustelun avulla käsitteen sisältöä vertaamalla omaa oppimaansa oppilastoverin ilmaisuun. Ilmaisuissa tulevat ilmi oppilaiden omat uskomukset, jotka liittyvät kyseiseen asiaan. Joutsenlahti (2003a; 2003b) määrittelee matematiikan kielentämisen matemaattisen ajattelun ilmaisemiseksi niin suullisesti kuin kirjallisesti sekä ilmeiden ja eleiden avulla.

Joutsenlahti ja Kulju (2010) esittävät luokkahuoneessa käydystä kirjallisesta ja puhutusta viestinnästä kolmen kielen mallin, joiden avulla oppilas ilmaisee matemaattista ajatteluaan (Kuva 1). *Luonnollinen kieli* on puhuttua ja kirjoitettua kieltä, matematiikan *symbolikieli* koostuu matemaattisista merkinnöistä ja *kuviokieleen* sisältyvät kuvat ja kuviot. Kuvasta 1 on huomattavissa kielten osittainen päällekkäisyys, joka tarkoittaa useamman kielen samanaikaista käyttöä. Esimerkiksi matematiikan luonnolliseen kieleen kuuluvat matematiikan symbolikielen käsitteet.



Kuva 1: Kolmen kielen malli

Näiden kolmen kielen lisäksi on olemassa neljäs taktiilinen toiminnan kieli, joka kuvastaa opetuksessa käytettäviä käsin kosketeltavia toimintamateriaaleja. Matemaattisen ajattelun kielentäminen tarkoittaa matemaattisen ajattelun ilmaisua Kuvassa 1 esitettyjen kielten sekä toiminnallisen kielen avulla. Eri kielien hyödyntäminen osana opetuskäytänteitä tulee ilmi eri ikäisten oppijoiden kohdalla. Alkuopetuksessa voidaan keskittyä enemmän kuviokielen ja taktiilisen toimintakielen avulla luomaan matemaattisille olioille merkityksiä, kun myöhemmällä iällä voidaan valita mikä vain kielistä ja pohtia kuinka jokin matemaattinen ilmentymä voitaisiin kuvata muiden kielten avulla. (Joutsenlahti & Rättyä, 2015)

Eri kielten avulla on tarkoitus pyrkiä luomaan käsitteille merkityksellisiä sisältöjä. Jokaisella kielellä on omat ominaispiirteensä ja tilanteen mukaan voidaan valita sopivin kieli ajattelun ilmaisuun. Esimerkiksi symbolikielen vahvuudet ovat käsitteiden määrällisiä muutoksia kuvatessa, kun taas kuviokielen hyödyt tulevat esille käsiteiden yhteyksien kuvaamisessa. (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018)

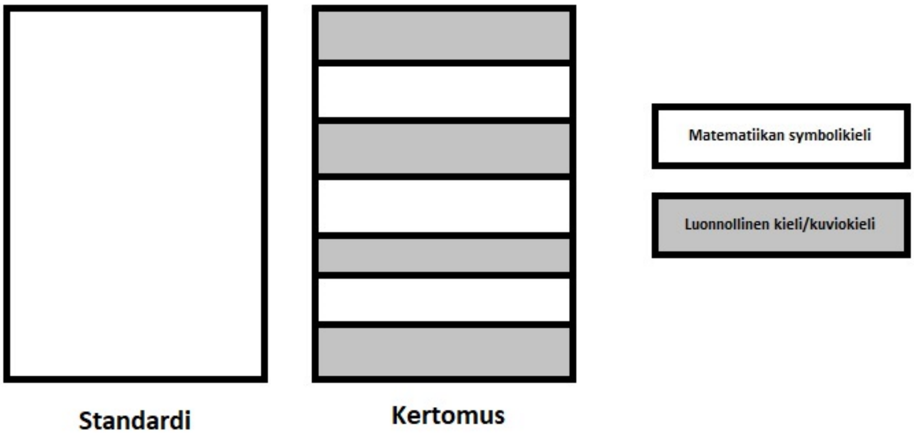
2.3.1 Kirjallinen kielentäminen

Matematiikassa kirjallista työskentelyä ovat usein vihkoon, paperille tai oppikirjoihin tehtävät laskut sekä koesuoritukset. Kirjallisen ratkaisun tuottaminen selkeyttää oppilaan ajatusprosessia, kun hän joutuu pohtimaan kirjoitettu ratkaisuaan ajan kanssa. Samalla tuotoksesta jää pysyvä jälki, johon oppilas voi halutessaan palata. Kirjoittamisprosessi on rinnastettavissa matemaattiseen ongelman ratkaisuprosessiin, joissa molemmissa tarkoituksena on muotoilla ongelma sekä sille sopiva ratkaisu. (Joutsenlahti, 2009)

Matematiikan tehtävien kirjallisissa ratkaisuissa kielentäminen muodostuu pääsääntöisesti kolmen kielen mallin mukaisesti (Kuva 1). Kirjallisessa kielentämisessä tarkastellaan matematiikan kieltä, luonnollista kieltä ja symbolikieltä kolmena kirjoitettuna kielenä. (Joutsenlahti, 2009) Matematiikan tehtävien ratkaisujen esittämistä varten Joutsenlahti (2009, 2010) esittelee viisi kirjallisen kielentämisen mallia, joissa painotus ei ole vain nykyisten matematiikan oppimateriaalien mukaan matematiikan symbolikielessä. Ratkaisumallit ovat:

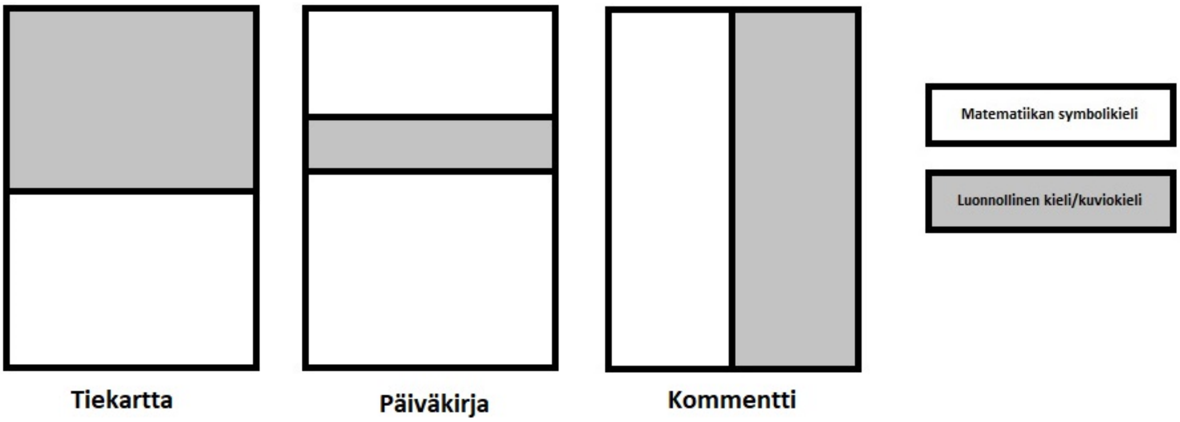
- ”standardi” -malli
- ”kertomus” -malli
- ”tiekartta” -malli
- ”päiväkirja” -malli
- ”kommentti” -malli.

”Standardi”-malli pohjautuu suurimmaksi osaksi matematiikan symbolikielen käyttöön. Tällaista mallia sovelletaan useimmissa oppikirjoissa ja pääpaino on matemaattisten esitystapojen hallitsemisessa, kuten lausekkeiden, laskujen ja vastauksien kirjoittamisessa yksikköineen. Mikäli laskun etenemistä kuvataan sanallisesti tai kuvioiden avulla symbolikielen selittämiseksi, kyseessä on ”kertomus”-malli. Mallissa luonnollinen kieli ja/tai kuviokieli vuorottelevat symbolikielen kanssa ratkaisun edetessä kuvaten ratkaisun välivaiheita mahdollisimman ymmärrettävästi, niin ratkaisijalle kuin lukijalle. Tarkoituksena on tuottaa suoraviivaisesti ja jäsennellysti etenevä ratkaisu, joka on vakuuttava ja helppolukuinen. (Joutsenlahti, 2009) Kyseiset mallit on esitetty Kuvassa 2.



Kuva 2: Kirjallisen kielentämisen ”standardi”- ja ”kertomus”-mallit

”Tiekartta”-mallissa ennen ratkaisun kirjoittamista symbolikielen avulla prosessi kuvataan luonnollisella kielellä ja mahdollisesti kuviokieltä hyödyntäen. Ratkaisu etenee laskun perusteluista sen mukaiseen laskun suorittamiseen symbolikielellä. ”Päiväkirja”-mallissa ratkaisija etenee pääsääntöisesti ”standardi”-mallin mukaisesti, mutta ongelmatilanteessa ajattelun kulkua kuvataan kirjoittamalla tai piirtämällä, eli luonnollisen kielen tai kuviokielen avulla. Tämän on tarkoitus jäsentää ja selventää ratkaisijan ajattelua, ei niinkään lukijan ymmärtämistä. (Joutsenlahti, 2009) Viidennessä ”kommentti”- mallissa ratkaisija kommentoi jokaista matematiikan symbolikielellä kirjoitettua välivaihetta luonnollisella kielellä laskuvaiheen viereen. Kyseinen malli on perinteinen opettajan taulutyöskentelyssä hyödynnetty uuden asian opetustyyli. (Joutsenlahti, 2010) Kuvassa 3 on esitetty ”tiekartta”-, ”päiväkirja”- ja ”kommentti”-mallit.



Kuva 3: Kirjallisen kielentämisen "tiekartta"-, "päiväkirja"- ja "kommentti"-mallit

Kaikille viidelle mallille yhteistä on se, että vastaus oletetaan kirjoitettavan kokonaisella virkkeellä eli luonnollisella kielellä. Silloin opiskelijalla on vielä mahdollisuus arvioida tuloksen mielekkyyttä, tarkastella saadun ratkaisun yksiköitä ja palata alkuperäiseen tehtävänantoon. (Mt.)

2.3.2 Suullinen kielentäminen

Suullisella kielentämisellä tarkoitetaan luokkahuoneessa luonnollisella kielellä käytyä keskustelua opettajan ja oppilaiden kesken. Keskustelut voivat liittyä esimerkiksi ryhmätyöskentelyyn, tehtävien ratkaisujen esittämiseen sekä yhteyksien luomiseen käsitteiden ja arkielämän välille. (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018) Suullinen kielentäminen on siis omien ajatusten kertomista omin sanoin, kommunikaatiota ja vuorovaikutusta muiden kanssa.

Suullisella kielentämisellä on merkitystä oppilaalle itselleen, kanssaopiskelijoille sekä opettajalle. Oppilaalle kielentäminen on työkalu omaan ajatteluun ja ajattelun rakenteiden kuvaamiseen. Oppilas muokkaa käsitteen sisältöä oman kokemusmaailman kautta. Ilmaistessaan suullisesti ajattelua oppilas joutuu samalla reflektoimaan itse omaa ajatteluaan. Tällöin oppilaalle tulee tieto metakognitiostaan, eli siitä mitä hän tietää. Muille oppilaille kyseessä on sosiaalinen vuorovaikutustilanne, jonka aikana he voivat kriittisesti arvioida oppilastoverin ilmaisua ja reflektoida omia oppejaan samasta asiasta. Tätä kuvaa yhteistoiminnallinen oppiminen. Opettajalle suullinen kielentäminen on puolestaan yksi jatkuvan arvioinnin väline. Oppilaan ilmaistessaan matemaattista ajatteluaan omin sanoin opettaja saa kuvan oppilaan ajatusprosesseista. Tällöin opettajalla on mahdollisuus arvioida oppilaan sen hetkistä osaamista ja tarvittaessa ohjata oppilaan käsitteiden muovautumista keskustelun ja opetusjärjestelyiden avulla. (Joutsenlahti & Rättyä, 2015; Joutsenlahti, 2003a; Tossavainen & Joutsenlahti, 2018)

Luku III
Tutkimuksen toteutus

3.1 Tutkimuskysymykset

Tutkimuksen tavoitteena on tutkia oppilaiden matemaattisen ajattelun ilmentymistä kielentämisen näkökulmasta oppilasparien ratkaistessa matematiikan tehtäviä. Matemaattista ajattelua tarkastellaan matemaattisen tiedon sekä kirjallisen ja puhutun viestinnän avulla. Tutkimuksen on tarkoitus vastata seuraaviin kysymyksiin:

1. Miten oppilasparien matemaattinen ajattelu ilmenee matemaattisen tiedon näkökulmasta tehtäviä ratkaistaessa?
2. Kuinka oppilasparit käyttävät luonnollista kieltä, matematiikan symbolikieltä ja kuviokieltä tehtäviä ratkaistessa?

Ensimmäisessä kysymyksessä on tarkoitus pohtia oppilaiden matemaattista ajattelua matemaattisen tiedon näkökulmasta. Tässä kysymyksessä matemaattinen tieto on jaettu proseduraaliseen-, konseptuaaliseen- sekä strategiseen tietoon Joutsenlahden (2003b, 2005) mukaan. Toisessa kysymyksessä oppilaiden matemaattista ajattelua havainnoidaan Joutsenlahden ja Kuljun (2010) esittämän kolmen kielen mallin mukaisesti. Tarkoituksena on havainnoida eri kielten hallintaa sekä kielten välillä toimimista. Tutkimuskysymyksiin pyritään vastaamaan analysoimalla oppilaiden tuottamia kirjallisia ratkaisuja sekä videoaineistoa, joka on kerätty oppilaiden ratkaistessa tehtäviä.

Seuraavaksi käydään läpi tutkimuksen metodit.

3.2 Metodit

3.2.1 Tutkimusmenetelmä

Tutkimus toteutettiin laadullisena tutkimuksena (ks. Saaranen-Kauppinen & Puusniekka, 2006). Laadulliset tutkimukset koostuvat useimmiten aiemmista tutkimuksista, aineistosta, jota on voitu muuttaa tekstiksi sekä tutkijan omista pohdinnoista sekä ajattelusta. Laadullisen tutkimuksen tavoitteena on saada ymmärrystä tutkittuun ilmiöön, jolloin tutkimusaineistoa havainnoidaan valitusta näkökulmasta.

Teorialähtöisen tutkimuksen mukaisesti tutkimusaineistoa analysoidaan ennalta esitettyjen teorioiden ja mallien pohjalta. Kyseistä analyysimenetelmää kutsutaan myös deduktiiviseksi analyysiksi, jolloin aineistoa analysoidaan tutkimuskysymysten pohjalla olevan teorian avulla.

Saaranen-Kauppisen ja Puusniekan (2006) mukaan laadullisessa tutkimuksessa aineistokeruuta ohjaavat tutkittava tieto, jolloin kerätyn aineiston tulisi olla relevanttia tutkimusongelmien kannalta. Aineiston hankinnassa tulee ottaa huomioon käytössä olevat resurssit sekä aineiston koko. Laadullisen tutkimuksen tarkoituksena on tutkitun ilmiön ymmärtäminen, jolloin pienempi otanta aineistoon on riittävä. Tähän tutkimukseen osallistuneet oppilaat valikoituivat vapaaehtoisuuden ja olemassa olevien kontaktien avulla.

Tutkimus toteutettiin tehtäväpohjaisena haastatteluna. Haastattelun katsotaan koostuvan ennalta suunnitellusta informaation keräämisestä. Haastattelua hyödynnetään aineistonkeruumenetelmänä, kun tarkoitus on kuvata haastateltavien ajatuksia sekä käsityksiä. (Hirsjärvi & Hurme, 2001) Haastattelun katsotaan koostuvan tutkijan sekä haastateltavan välisistä tutkimusaiheeseen liittyvästä keskustelusta. Tässä tutkimuksessa tutkijan ja haastateltavien välinen keskustelu rajoittui tutkimuksen alussa haastateltavien suulliseen itsearvioon matematiikan osaamisestaan sekä tehtävien ratkaisun lomassa mahdollisesti sanallisesti pyydettyihin tehtävien vastauksiin. Tutkimus tapahtui parihaastatteluna, jonka avulla voidaan tutkia haastateltavien näkemyksiä. Parihaastattelun katsotaan olevan ryhmähaastattelun alalaji, jossa osanottajat keskustelevat ja kommentoivat asioita vapaamuotoisesti tuottaen tietoa tutkimuksen alla olevasta ilmiöstä (Hirsjärvi & Hurme, 2001). Tutkimus toteutettiin oppilaspareittain juurikin oppilaiden välisen keskustelun analysoinnin vuoksi. Keskustelusta pyrittiin havainnoimaan oppilaiden matemaattista ajattelua tutkimuskysymykset mielessä pitäen.

Empiirisen tutkimuksen mukaisesti tutkimustulokset kerättiin tekemällä havaintoja oppilaiden työskentelystä kielentämisen näkökulmasta. Havainnointi toteutettiin suurimmaksi osaksi passiivisena oppilaiden käyttäytymisen ja ajattelun seuraamisena. Tehtäväpohjaiset haastattelut videoitiin, jonka jälkeen kerätty videoaineisto muutettiin osin tekstiksi litteroinnin avulla. Saatuja tuloksia pyritään vertaamaan teoriataustaan ja tulkitsemaan yksityiskohtaisesti merkityksellisten teemojen mukaisesti.

3.2.2 Aineistonkeruu

Tutkimus toteutettiin Itä-Suomessa sijaitsevalla koululla. Koulun valintaan vaikuttivat koulun rehtorin sekä koululla työskentelevien ennalta tuttujen matematiikan, fysiikan ja kemian opettajien halukkuus osallistua tutkimukseen. Tutkimukseen osallistui yhteensä 12 oppilasta kahdesta eri kahdeksannen luokan matematiikan ryhmästä. Tutkimuksen kohderyhmäksi valikoituivat kahdeksannen luokan oppilaat perusopetuksen opetussuunnitelman matematiikan vuosiluokkakohtaisten tavoitteiden ja matematiikan sisältöalueiden perusteella.

Perusopetuksen opetussuunnitelmassa kahdeksannen luokan matematiikan opetuksen yhtenä tavoitteena on oppilaan matemaattisen ajattelun ilmaisemisen harjoittelu niin suullisesti kuin kirjallisesti (Joensuun kaupunki, 2016). Kahdeksannen luokan matematiikassa sisältöalueisiin kuuluvat yhtälöt, epäyhtälöt sekä ongelmanratkaisu yhtälöiden avulla. Nämä aihealueet soveltuivat matemaattisen kielentämisen tutkimukseen ja oppilaat olivat käsitelleet kyseiset aihealueet juuri ennen tutkimuksen toteuttamista. Oppilaita valittiin kahdesta ryhmästä, jotta tutkimus saatiin toteutettua ryhmien matematiikan oppituntien aikana. Tutkimuksen kannalta oli myös mielestä, että oppilaat olivat eri ryhmistä, jolloin kaikki osallistujat eivät olleet saman opettajan oppilaita. Tutkimukseen osallistuvien ryhmien oppilaiden huoltajille lähetettiin oppilaiden osallistumista koskeva tutkimuslupahakemus.

Tutkimukseen osallistui kolme kahden hengen oppilasparia molemmista matematiikan ryhmistä. Tutkimuksessa oppilasparit ratkaisivat yhdessä neljä yhtälöihin liittyvää tehtävää. Jokaiselle oppilasparille varattiin noin 15 minuuttia aikaa tehtävien ratkaisuun. Oppilaat nimettiin pareittain kirjaimella ja numerolla, koodina A1 ja A2, B1 ja B2 ja niin edelleen. Koodissa kirjain tarkoitti paria ja numero oppilasta. Tutkimukseen osallistuneet oppilaat valittiin vapaaehtoisuuden perusteella. Tutkimuksen kannalta mielekkäintä oli, että oppilasparilla syntyi keskustelua tehtävien ratkaisuista. Yhtenä keskusteluun vaikuttavana tekijänä koettiin oppilaiden verrattain saman tasoinen matemaattinen osaaminen, jonka huomioiden ryhmien opettajat muodostivat oppilasparit. Keskustelun merkitys perustui suullisen ja kirjallisen kielentämisen tutkimiseen.

Ennen tehtävien suorittamista oppilaita pyydettiin sanallisesti arvioimaan heidän omaa matemaattista osaamistaan. Tämän avulla kartoitettiin oppilaiden taitotaso. Tutkimukseen osallistui yhteensä kuusi oppilasparia eli 12 oppilasta, jonka todettiin olevan riittävä otos laadulliseen tutkimukseen. Jokaisen oppilasparin tehtävien ratkaisu videoitiin, jotta aineistoa voitiin analysoida myöhemmin.

Tehtävät käsittelivät yhtälöitä, epäyhtälöitä sekä ongelmanratkaisua yhtälöiden avulla. Tehtävät suunniteltiin soveltamalla Joutsenlahden ja Kuljun (2010) esittämää kolmen kielen mallia sekä Joutsenlahden (2009, 2010) esittämiä kirjallisen kielentämisen malleja. Tehtävät pyrittiin suunnittelemaan siten, että niitä ratkaistaessa oppilaiden tuli hyödyntää luonnollista kieltä sekä symboli- ja kuviokieltä. Myös tehtävänannot toteutettiin hyödyntämällä kaikkia kolmea kieltä. Tämän lisäksi kirjallisten ratkaisujen rakenteisiin kiinnitettiin huomiota siten, että tehtävien ratkaisuista ilmenisti mahdollisimman monipuolisesti oppilaiden matemaattinen ajattelu. Kolmen ensimmäisen tehtävän osalta kirjallisen kielentämisen ratkaisumalleja ei varsinaisesti täsmennetty, vaan ne muotoutuivat oppilasparien ratkaisujen mukaan. Neljännessä tehtävässä hyödynnettiin Joutsenlahden (2010) esittämää ”kommentti”-mallia. Tehtäväpaperi on esitetty Liitteessä A.

Luku IV

Tulokset

Seuraavaksi esitellään tutkimuksesta saadut tulokset ja oppilasparien työskentelystä tehdyt havainnot. Tulokset ja havainnot on analysoitu tehtäväkohtaisesti. Tämän lisäksi esitetään oppilaiden itsearvioinnit matematiikan osaamisestaan.

Tutkimukseen osallistuneet oppilaat arvioivat oman matematiikan osaamisensa suullisesti ennen tehtävien tekoa. Oppilaiden arviot matemaattisesta osaamisestaan on esitetty alla olevassa Taulukossa 1.

Taulukko 1: Oppilaiden itsearviointi matematiikan osaamisestaan

Matemaattinen osaaminen	Numeroarvosana	Sanallinen arvio
A1	7-8	
A2	8-9	
B1		x
B2	9-10	
C1		x
C2		x
D1	9	
D2	9	
E1	8-9	x
E2		x
F1		x
F2	8-9	

Parin A oppilaat arvioivat matemaattisen osaamisensa numeroarvosanoilla. Oppilas A1 antoi arvosanakseen 7-8 ja oppilas A2 arvosanakseen 8-9. Parin B oppilas B1 arvioi osaavansa jonkin verran matematiikkaa ja oppilas B2 antoi arvosanakseen 9-10. Parin C oppilaat kertoivat osaavansa tehdä matematiikan laskuja paremmin oppitunneilla, mutta heidän osaamisensa ei välittynyt yhtä hyvin koetilanteissa. Parin D oppilaat arvioivat molemmat matematiikan osaamisensa numeroarvosanalla yhdeksän. Oppilas E1 antoi matematiikasta numeroarvosanakseen 8-9 ja kertoi olevansa epävarma itsestään ja matemaattisesta osaamisestaan, kuitenkin tiedostaen lopulta osaavansa asiat. Oppilas E2 arvioi matematiikan osaamisensa keskinkertaiseksi. Pari F oppilas F1 kertoi osaamisensa riippuvan täysin aihealueesta ja oppilas F2 arvioi osaamisensa numeroarvosanalla 8-9.

4.1 Tehtävä 1. Sanallisesta tehtävästä yhtälöksi

Ensimmäinen tehtävä oli Kuvan 4 mukainen sanallinen tehtävä. Tehtävänanto oli kirjoitettu luonnollisella kielellä ja tehtävän ratkaisu edellytti matematiikan symbolikielen sekä mahdollisesti luonnollisen kielen käyttöä. Tehtävässä oli tarkoitus ratkaista ongelma yhtälön avulla, joka oli oppilaspareille ennestään tuttu tehtävätyyppi.

> **1.** Ville poimi äitinsä kanssa mustikoita myyntiin. Ville keräsi kolme kertaa enemmän mustikoita kuin äitinsä. Yhteensä he keräsivät 8 litraa. Yksi litra mustikoita myytiin 4 euron litrahintaan. Paljonko Ville sai rahaa keräämistään mustikoista?

Kuva 4: Tehtävämonisteen ensimmäinen tehtävä

Oppilasparien tehtävän ratkaisusta tehtiin havaintoja, joista keskeisimmät kerättiin alla olevaan Taulukkoon 2.

Taulukko 2: Ensimmäisestä tehtävästä tehdyt parikohtaiset havainnot

Tehtävä 1	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Tehtävänanto luetaan ääneen		x			x	x
Tehtävänannosta tärkeiden sanojen huomioiminen	x					
Matematiikan symbolikielen tuottamisessa hankaluuksia	x		x			x
Oikea ratkaisu luonnollisella kielellä ilmaistuna			x	x		x
Lähtötilanteesta muodostettu yhtälö		x		x	x	
Yhtälö ratkaistu oikein				x	x	
Oikea ratkaisu			x	x	x	x
Väärä ratkaisu		x				
Tehtävän ratkaisussa vastataan väärään asiaan		x				
Ei ratkaisua	x					
Yksikkötarkastelussa puutteita		x		x	x	x

Oppilasparit B ja E aloittivat tehtävän ratkaisun toisen parista lukemalla koko tehtävänannon ääneen. Parin F oppilaat lukivat koko tehtävänannon ääneen vuorotellen, lukuun ottamatta ensimmäistä virkettä siten, että oppilas F2 luki litrahintaa käsittelevän virkkeen ja oppilas F1 muut lauseet. Tehtävän ratkaisua pohdittaessa parin F oppilaat keskittyivät aluksi ratkaisemaan tehtävää juurikin niiden tietojen avulla, jotka he olivat lukeneet ääneen tehtävänannosta. Parin A työskentely oli hiljaista eikä oppilasparin välistä keskinäistä keskustelua syntynyt alkuun lainkaan. Oppilas A1 kiinnitti huomiota tiettyihin kohtiin tehtävänannossa ja alleviivasi itsenäisesti kohdat ”kolme kertaa enemmän”, ”8 litraa” sekä ”4 euron”. Parin C oppilaat lukivat tehtävänannon hiljaa mielessään juttelematta siitä lainkaan.

Taulukosta 2 nähdään, että tehtävän ratkaisussa oppilaspareilla A, C ja F ilmeni hankaluuksia matematiikan symbolikielin käytössä. Parin A oppilaat kävivät hieman keskustelua tehtävän ratkaisuun liittyvistä ideoista päätymättä kuitenkaan lopulliseen tulokseen ja kirjoittamatta mitään paperille. Parit C ja F ratkaisivat tehtävän luonnollisella kielellä täysin oikein, mutta vastauksen kirjoittaminen matemaattisin merkinnöin aiheutti ongelmia. Oppilas C1 päätteli ääneen tehtävän ratkaisun ja vastauksen, mutta kumpikaan parin C oppilaista ei osannut kirjoittaa ratkaisua paperille matematiikan symbolikielellä.

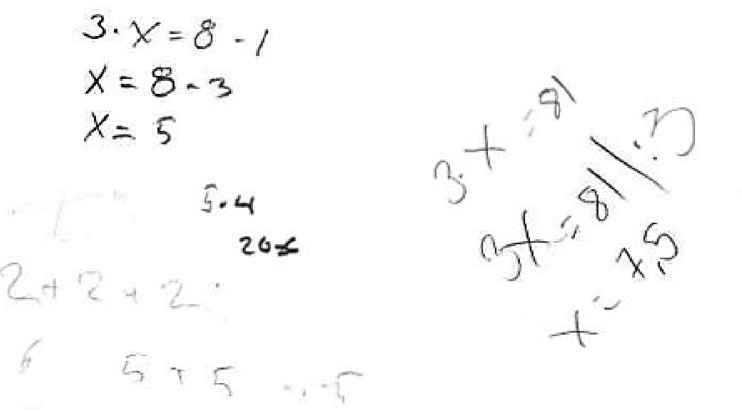
He päätyivät kirjoittamaan tehtävän vastauksen luonnollisella kielellä, mutta tehtävän välivaiheet ja laskut koostuivat vain merkinnästä ”8:2”.

Parin F oppilaat lähestyivät tehtävän ratkaisua keskenään eri tavoin. Oppilas F2 keskittyi mustikoiden litrahintaan ja sen kautta kaikkien mustikoiden kokonaismyyntihintaan. Oppilas F1 opasti kuitenkin ensin ratkaisemaan Villen keräämien mustikoiden määrän, jonka jälkeen molemmat oppilaista alkoivat pohtia mahdollista ratkaisua. Parin F luonnollisella kielellä käyty tehtävän ratkaisun päättely eteni seuraavanlaisesti:

> *F1: Kun se keräs kolme kertaa enemmän kun se äiti. Ja kaheksan on puoliks neljä. Ja sitees jos... Kaheksan jaettuna neljällä on kaks. Eli keräskö se niinku 6 litraa niitä mustikoita?*
> *F2: Joo, ootas... No entäs sitten vaan ihan kaheksan jaettuna kolmella? Eiku. Voiks sen tehä silleen. Ei…*
> *F1: No mietttään ootas… Hmmm. Laitetaan ensin että kaheksan litraa (oppilas kirjoittaa tehtäväpaperille 8l) ja sitten jos se periaatteessa niinku se keräs kolme kertaa enemmän kun se äiti eli se äiti keräs yhen osuuden siitä kaheksasta litrasta ja se keräs kolme. Eli niinku jaetaanko se sitten neljällä se kaheksan?*

Oppilas F1 osasi siis päätellä luonnollisella kielellä Villen keräämien mustikoiden määrän, mutta ratkaisun matemaattiset merkinnät jäivät vähäisiksi. Tehtävän kirjalliseksi ratkaisuksi muodostuivat väärin laskettu jakolasku ”8l/4=6l” sekä lopullinen mustikoista saatu rahamäärä ”6×4e=24e”. Väärin laskettu jakolasku oli suora käännös oppilaan F1 puheesta.

Oppilasparit, joilla ei ollut hankaluuksia matematiikan symbolikielen tuottamisessa muodostivat lähtötilanteesta yhtälön. Pari B muodosti kaksi yhtälöä, joista molemmat olivat väärin. Kuvassa 5 on esitettynä parin B ratkaisu tehtävään yksi.



Kuva 5: Oppilasparin B ratkaisu tehtävään yksi

Kuvan 5 oikeassa reunassa olevan ensimmäisen yhtälön kohdalla oppilas B2 osasi perustella oppilaan B1 laskuvaiheet ja ratkaisun vääräksi sijoittamalla tuloksen $x = 7{,}5$ alkuperäiseen yhtälöön $3x = 8l$. Tämän jälkeen pari päätyi toiseen, Kuvan 5 vasemmassa reunassa esitettyyn väärin muodostettuun yhtälöön, jonka matemaattinen ratkaisu oli väärin. Kumpikaan parin B oppilaista ei tarkistanut saatua tulosta samalla tavoin, kuin edellisen yhtälön kohdalla huomatakseen ratkaisun $x = 5$ virheellisyyden. Parit D ja E muodostivat oikeanlaiset yhtälöt sekä ratkaisivat yhtälöt oikein. Pari E kirjoitti matemaattisen ratkaisun lisäksi välivaiheiden vastaukset ja ratkaisun luonnollisella kielellä selkeyttääkseen tehtävän ratkaisua.

Neljä pareista päätyivät tehtävässä oikeaan ratkaisuun ja yksi pareista väärään. Väärään ratkaisuun päätyneen parin B kohdalla oppilaiden työskentelyssä ei tullut ilmi, mitä asiaa he merkitsivät laskuissaan muuttujalla x. Oppilasparin ratkaistua tehtävän kysyin tätä asiaa selvennykseksi. Oppilas B1 vastasi muuttujan x kuvanneen äidin keräämien mustikoiden määrää. Tällöin kumpikaan oppilaista ei oivaltanut, että he olivat laskeneet äidin keräämistä mustikoista saadun rahamäärän eli vastanneet tehtävässä väärään asiaan. Parin A työskentely ei edennyt tehtävän osalta, jolloin ohjasin heitä siirtymään tehtävissä eteenpäin ajankäytöllisten syitten takia. Tämän vuoksi pari A ei saanut ratkaisua ensimmäiseen tehtävään.

Kaikki pareista B, D, E ja F muodostivat matemaattisia laskuja tehtävän ratkaisuun ja kaikilla heistä oli puutteita yksikkötarkastelussa. Yksikkövirhe tapahtui tehtävän ratkaisun viimeisessä vaiheessa, jossa tuli selvittää Villen saamat rahat keräämistään mustikoista. Virheet olivat mustikoiden määrän yksikön eli litrojen unohtaminen sekä litrahinnan virheellinen merkitseminen. Neljän euron litrahintaa merkittiin ”4€” eikä ”4€/l”.

4.2 Tehtävä 2. Yhtälöstä sanalliseen ongelmaan

Toisessa tehtävässä oppilaiden tuli itse muodostaa annetulle yhtälölle tarina, joko suullisesti tai kirjallisesti ja sen jälkeen ratkaista yhtälö. Tehtävä on esitetty Kuvassa 6.

2. Muodosta yhtälölle $4 + x + x = 10$ suullisesti tai kirjallisesti tarina/tehtävänanto ja ratkaise yhtälö.

Kuva 6: Tehtävämonisteen toinen tehtävä

Tehtävän ratkaisu edellytti oppilailta matematiikan symbolikielen kääntämistä luonnolliselle kielelle sekä symbolikielen käyttöä yhtälönratkaisussa. Kyseinen tehtävätyyppi oli vähemmän oppikirjoissa esiintynyt ja näin ollen vieraampi oppilaille. Parikohtaiset havainnot kyseisestä tehtävästä on esitetty Taulukossa 3.

Taulukko 3: Toisesta tehtävästä tehdyt parikohtaiset havainnot

Tehtävä 2	A	B	C	D	E	F
Tehtävänannon selittäminen omin sanoin	x					
Tehtävänanto luetaan ääneen		x			x	x
Tarinan muodostaminen onnistui				x	x	x
Tarina pyritään muodostamaan yhtälönratkaisun välivaiheesta						x
Tarinaksi pohditaan jotain, mutta ei päädytä mihinkään	x	x				
Yhtälö ratkaistaan aluksi päättelemällä		x	x			x
Yhtälönratkaisu oikein	x	x	x	x	x	x

Parin A oppilaat lukivat tehtävänannon aluksi itse, jonka jälkeen keskustelivat siitä. Oppilas A1 ei ensin ymmärtänyt mitä tarinan keksiminen tarkoitti, jolloin oppilas A2 auttoi ja selitti tehtävänannon omin sanoin käyttäen tarinasta edellistä tehtävää esimerkkinä. Oppilasparit B, E ja F lukivat tehtävänannon ääneen ennen kuin alkoivat ratkaista tehtävää.

Tarinan muodostaminen onnistui pareilta D, E ja F. Kaikki kolmesta parista muodostivat kirjallisesti useamman lauseen mittaiset tarinat, joista parien D ja E tarinat olivat tarvittavan täsmällisiä. Kyseisten tarinoiden avulla oli mahdollista muodostaa annettu yhtälö ja tarinoissa oli selvästi ilmaistu kysymys, johon tuli saada vastaus. Parin D muodostaessa tarinaa oppilas D2 kiinnitti erityistä huomiota tarinan täsmällisyyteen lisäämällä sanan ”*kaikkien*” osaksi tarinaa. Parin D lopullinen tarina oli seuraavanlainen:

> *Jos Pertti on 4-vuotias, niin kuinka vanhoja ovat kaksospojat Jakke ja Pete, kun heidän kaikkien yhteenlaskettu ikä on 10* (pari D)

Parin E oppilaat muodostivat annetusta yhtälöstä sujuvasti seuraavanlaisen tarinan:

> *Anni, Onni ja Oona keräsivät omenoita. Anni keräsi 4 omenaa, Onni ja Oona keräsivät kummatkin x määrän omenoita ja he saivat yhteensä kymmenen omenaa. Selvitä Onnin ja Oonan omenoiden määrät* (pari E)

Parin F oppilas F1 ei aluksi ymmärtänyt millainen tarinan tulisi olla, jolloin oppilas F2 vertasi pyydettyä tarinaa aiemmin oppitunneilla olleisiin ongelmanratkaisu tehtäviin. Oppilas F2 muisteli, että tarinassa tulisi käyttää yhtälössä esiintyneitä lukuarvoja neljä ja kymmenen. Tämän jälkeen molemmat oppilaista yrittivät muodostaa tarinaa, jonka lähtökohtana oli laskutoimitus ”10-4”. Lopulta oppilas F1 muodosti kirjallisesti seuraavanlaisen tarinan oppilaan F2 luonnollisella kielellä ilmaistusta tarinasta:

> *Y:llä on 10 omenaa se syö 4 jakaa loput a:lle ja b:lle* (pari F)

Parin F lopullinen tarina vaikutti olevan yhtälönratkaisun välivaiheesta. Luonnollisella kielellä muodostettu tarina sisälsi lisäksi kysymyksen ”*Paljon ne saa?*”, viitaten a:n ja b:n saamien omenoiden lukumäärään. Kirjallisesta tarinasta edellä mainittu kysymys jäi uupumaan, jolloin tarina jäi keskeneräiseksi.

Molemmat pareista A ja B ymmärsivät mitä tehtävänannossa haettiin, mutta eivät onnistuneet muodostamaan varsinaista tarinaa. Oppilas A1 ehdotti tarinaksi ”*Ratkaise x*”, johon kumpikaan oppilaista ei perehtynyt enempää. Pari A päätyi valitsemaan tarinan aiheeksi mustikat, jonka jälkeen tarinan keksiminen ei enää edennyt. Parin B oppilas B2 alkoi muodostamaan tarinaa oppilaiden lukumääristä. Parin B käymä keskustelu eteni seuraavanlaisesti:

> *B2: Jos luokassa on neljä henkee ja sit sinne tulee vaikka kaks kertaa niin paljon nyt ihmisiä, kun tällä hetkellä joka olis eli 8 mut, mutta sit me, me siitä pitää miinustaa vielä puolet silleen niinku alkuperäisestä luvusta joka on neljä.*
> *B1: Siit tulee kaks.*

Oppilas B2 koitti muodostaa tarinaa siten, että hän laski yhtälössä esiintyneet muuttujat yhteen, jonka jälkeen termi ”2x” esiintyi luonnollisella kielellä sanoina ”*kaksi kertaa niin paljon*”. Tämä toistui useamman kerran keskustelun aikana. Oppilas B1 päätyi ratkaisemaan yhtälön, jonka jälkeen hän ehdotti toteavasti tarinaksi ”*Jos sinne tulee kolme poikaa ja kolme tyttöö*” osoittaen alkuperäistä yhtälöä. Lopputuloksena pari B siirtyi seuraavaan tehtävään lopullisen tarinan jäädessä epäselväsi. Pari C ratkaisi yhtälön, mutta ei kiinnittänyt huomiota koko tehtävänantoon, jolloin tarinan keksiminen jäi kokonaan tekemättä.

Oppilasparit lähestyivät tehtävän ratkaisua eri tavoin. Parit C ja D aloittivat tehtävän ratkaisun ratkaisemalla ensiksi annetun yhtälön. Parin C oppilas C1 ratkaisi yhtälön ensiksi luonnollisella kielellä päättelemällä ennen kuin kirjoitti ratkaisuvaiheet vastauspaperille. Parin D ratkaistua yhtälön he muodostivat sujuvasti tehtävänannossa pyydetyn tarinan. Oppilaspari E ratkaisi tehtävän päinvastoin kuin pari D muodostaen ensiksi pyydetyn tarinan ja sen jälkeen ratkaisten yhtälön. Parit B ja F miettivät aluksi pyydettyä tarinaa, jonka jälkeen he ratkaisivat yhtälön. Parin F ratkaistaessa yhtälöä oppilas F1 päätteli ääneen yhtälön vastauksen. Oppilaalla F2 oli kuitenkin tarve nähdä yhtälönratkaisun vaiheet paperilla ymmärtääkseen mistä oppilaan F1 päättelemä vastaus muodostui. Pari B päätteli myös ensiksi yhtälön vastauksen ennen kuin kirjoitti yhtälönratkaisun vastauspaperille. Lopuksi parit B ja F palasivat uudelleen hetkeksi miettimään pyydettyä tarinaa.

4.3 Tehtävä 3. Kuvan tulkinta epäyhtälöksi

Kolmas tehtävä käsitteli epäyhtälöitä. Tehtävä on esitetty Kuvassa 7.

Kuva 7: Tehtävämonisteen kolmas tehtävä

Tehtävässä oli tarkoituksena tulkita matematiikan kuviokielellä esitettyä taljaa ja sen perusteella muodostaa matematiikan symbolikielellä kuvaa vastaava epäyhtälö sekä ratkaista se. Parikohtaiset havainnot on esitetty Taulukossa 4.

Taulukko 4: Kolmannesta tehtävästä tehdyt parikohtaiset havainnot

Tehtävä 3	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Tehtävänanto luetaan ääneen						x
Taljan vertaaminen oppikirjoissa oleviin vaakoihin		x		x		x
Sanallinen selitys kuvassa olevalle taljalle		x	x		x	x
Oikeanlaisen epäyhtälön muodostaminen	x	x	x		x	x
Epäyhtälön ratkaiseminen sujuvaa	x		x			
Epäyhtälön ratkaiseminen epävarmaa		x			x	x
Epäyhtälömerkin käyttö epävarmaa			x		x	
Yhtälön muodostaminen epäyhtälön sijaan				x		
Oikea ratkaisu	x	x	x			x
Väärä ratkaisu				x		
Yksikkötarkastelussa puutteita	x	x	x			x
Aika loppui kesken					x	

Tehtävää lukiessa parit B, D ja F vertasivat kuvassa olevaa taljaa oppikirjojen epäyhtälötehtävissä esiintyneisiin vaakoihin. Oppilasparit muistelivat, kuinka he olivat ratkaisseet vaaka -tehtävät ja sovelsivat samaa tapaa nykyiseen talja- tehtävään. Parin B oppilaat hahmottelivat taljan kuvan päälle vastaavanlaisen kuvan vaa’an avulla.

Parien B, C, E ja F oppilaat osoittivat ymmärtävänsä, millaista tilannetta tehtävänannossa ollut talja esitti. Heidän luonnollisella kielellä käydyistä keskusteluista tuli ilmi, että he ymmärsivät taljan vasemman puolen olevan painavampi kuin oikean puolen. Esimerkkeinä oppilaiden F1 ja C1 luonnollisella kielellä käydyt pohdinnat:

> *F1: ”Eikun mikä tuo voi, mikä tuo voi niinku, mikä tuon x:n pitää olla (oppilas osoittaa taljan vasenta puolta) että se on painavampi, kun nämä (oppilas osoittaa taljan oikeaa puolta)?”*

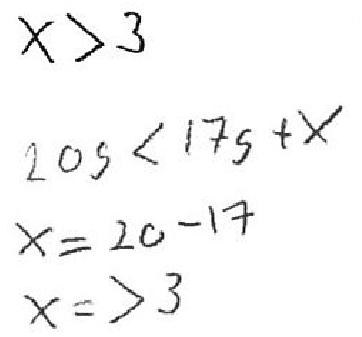
Oppilaan F1 selityksestä parilleen kävi ilmi, että hän ymmärsi taljan vasemman puolen olevan painavampi. Oppilaan C1 pohdinta oli seuraavanlainen:

> *C1: ”Tossa on 20 grammaa (oppilas osoittaa taljan oikeaa puolta). Tossa on 17 (oppilas osoittaa taljan vasenta puolta). Eli se tarttee kolme tai enemmän grammaa, että se olis… Tai niinku, enemmän kun kolme grammaa et se ois painavampi (oppilas osoittaa samalla taljan vasenta puolta).”*

Oppilaan C1 kuvaillessa tehtävänannossa olevaa talja- kuvaa hän päätteli samalla tehtävän ratkaisun ääneen.

Kaikki oppilasparit, lukuun ottamatta paria D, muodostivat kuvasta oikeanlaisen epäyhtälön. Osalla pareista esiintyi hankaluuksia epäyhtälön ratkaisemisessa ja osalla epäyhtälömerkin käytössä. Pareille A ja C epäyhtälön ratkaisun välivaiheet, termien siirtely sekä yhteen- ja vähennyslaskut eivät tuottaneet ongelmia. Parien B, E ja F toinen oppilaista ei muistanut kunnolla, kuinka epäyhtälö tulisi ratkaista. Parin B kohdalla oppilas B2 ratkaisi epäyhtälön oppilaan B1 seuratessa epäillen vierestä. Parin E oppilas E1 sekoitti epäyhtälön ratkaisemisen aiemmin oppitunneilla käytyihin suhde- laskuihin ja ehdotti jakolaskun kirjoittamista. Parin F oppilaat päättelivät vastauksen oikein, mutta oppilas F2 epäröi yhtälönratkaisun välivaiheiden kirjoittamisessa.

Epäyhtälömerkin käytössä hankaluuksia tuottivat merkin suunta sekä merkintätapa. Parin C oppilas C1 muodosti Kuvan 8 mukaisen ratkaisun.



Kuva 8: Oppilasparin C ratkaisu tehtävään kolme

Kuvasta 8 huomataan, että oppilas C1 osasi merkitä aluksi vastauksen oikein. Epäyhtälön ratkaisemisen välivaiheissa epäyhtälömerkin käyttö oli kuitenkin epäjohdonmukaista. Oppilas C2 huomautti tehtävän ratkaisun jälkeen merkintätavasta ”$x => 3$”, jonka oppilas C1 perusteli luonnollisella kielellä lukien vastauksen ääneen: ”*Niin niin, x on suurempi, toihan on suurempi kuin merkki*”, huomaamatta merkintävirhettä. Parin E oppilaat olivat epävarmoja epäyhtälömerkin suunnasta. Oppilas E1 muisti oppitunneilta tutun muistisäännön ”*nokka auki suurempaan*”, mutta oppilaan E2 ollessa tietämätön asiasta oppilas E1 tuli epävarmaksi omasta ehdotuksestaan. Parin E kohdalla ohjasin oppilaat seuraavaan tehtävään ajan loppumisen vuoksi, joten tehtävän ratkaisu jäi kesken.

Pari D muodosti epäyhtälön sijaan yhtälön ja ratkaisi sen oikein. Vastaus oli kuitenkin väärin epäyhtälömerkin puuttuessa. Oppilaat eivät käyneet keskustelua tehtävänannossa olleesta kuvasta tehtävää ratkaistessa, jonka vuoksi parin ratkaistua tehtävän pyysin heitä sanomaan vastauksen luonnollisella kielellä ääneen. Oppilaan D2 sanottua vastauksen ääneen, hän oivalsi vastauksen olevan väärin ja korjasi ratkaisua suullisesti seuraavanlaisesti:

> *D2: ” X on kolme grammaa. Eikun… Mut sen pittää olla, tähän pittää laittaa se x on suurempi, kun kolme grammaa. Tai voihan se olla tuo kolmekin.”*

Oppilas D1 myötäili korjattua vastausta ja pari päätyi korjaamaan ratkaisun suullisesti muotoon ”*x on vähintään kolme grammaa*”. Vastaus jäi kuitenkin yhä virheelliseksi oppilaiden ajatellessa, että x voisi olla myös kolme grammaa, jolloin talja olisi tasapainossa. Pari ei korjannut kirjoitettua vastausta symbolisella kielellä.

Parin F oppilaat eivät ratkaisseet tehtäväpaperin tehtäviä kronologisessa järjestyksessä. Tehtävän kolme luettuaan he päättivät ratkaista neljännen tehtävän, koska eivät muistaneet mitä epäyhtälö tarkoitti. Neljännen tehtävän ratkaistuaan pari F palasi kolmannen tehtävän pariin lukien tehtävänannon ääneen.

Kaikilla oppilaspareilla, jotka päätyivät oikeaan ratkaisuun, puuttui vastauksesta yksikkö. Parin B oppilaat jättivät tarkoituksella ratkaisun välivaiheista yksiköt pois muistamatta kuitenkaan lisätä yksikköä vastaukseen. Parin C mainitsi luonnollisella kielellä vastauksessa olevan yksikön, mutta kirjallisesta tuotoksesta se jäi uupumaan.

4.4 Tehtävä 4. Yhtälönratkaisun vaiheet järjestykseen

Neljännessä tehtävässä oppilasparien tuli laittaa ennalta annetut yhtälönratkaisun vaiheet oikeaan järjestykseen sekä perustella vaiheet. Tehtävä on esitetty Kuvassa 9.

4. Laita seuraavat yhtälönratkaisun vaiheet oikeaan järjestykseen ja perustele/kuvaa kukin vaihe asianmukaisia käsitteitä käyttäen alempaan taulukkoon.

	Laskuvaihe
A	$12 \cdot \frac{2x}{4} - 12 \cdot 3 = 12 \cdot \frac{x}{3} + 12 \cdot \frac{1}{2}$
B	$2x = 42$
C	$6x - 36 = 4x + 6$
D	$\frac{2x}{4} - 3 = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$
E	$6x - 4x = 6 + 36$
F	$x = 21$

Järjestys (kirjain)	Perustelu

Kuva 9: Tehtävämonisteen neljäs tehtävä

Tehtävän ratkaisu edellytti oppilailta matematiikan symbolikielen ymmärtämistä ja sen perustelua kirjallisesti luonnollisella kielellä. Kyseinen tehtävätyyppi oli ennalta tuntematon oppilaille ja sen rakenne perustui Joutsenlahden (2009) esittämään ”kertomus”-malliin. Parikohtaiset havainnot on esitetty alla olevassa Taulukossa 5.

Taulukko 5: Neljännestä tehtävästä tehdyt parikohtaiset havainnot

Tehtävä 4	A	B	C	D	E	F
Tehtävänanto luetaan ääneen		x			x	x
Tehtävänannon selittäminen omin sanoin	x				x	
Vaiheiden järjestelyssä edetään lopusta alkuun	x	x	x	x	x	x
Vaiheet oikeassa järjestyksessä		x		x	x	
Vaiheet väärässä järjestyksessä	x		x			x
Perusteluissa tarvittavat käsitteet hallussa				x		
Perusteluissa tarvittavia käsitteitä ei muisteta, mutta ne selitetään omin sanoin		x			x	
Yhtälönratkaisun vaiheiden perusteleminen yksittäisten termien- ja yhtälön ulkonäön avulla	x	x	x	x	x	x
Yhtälönratkaisun vaiheiden perusteluissa ei edetä kronologisesti	x	x	x	x	x	x

Parit B, E ja F aloittivat tehtävän ratkaisun lukemalla tehtävänannon ääneen. Parien A ja E oppilaat päätyivät selittämään tehtävänannon parilleen omin sanoin selventäen mitä vaiheiden oikeaan järjestykseen laittaminen tarkoitti. Oppilasparit aloittivat yhtälönratkaisun vaiheiden järjestelyn joko etsimällä lähtötilannetta kuvaavan yhtälön tai löytämällä viimeisen vaiheen eli yhtälön ratkaisun. Jokainen pari päätyi jossain vaiheessa etenemään vaiheiden järjestelyssä ensimmäisestä laskuvaiheesta kohti viimeistä laskuvaihetta sekä lopusta alkuun, eli edeten viimeisestä vaiheesta sitä edelliseen ja niin edespäin.

Oppilasparit B, D ja E laittoivat yhtälönratkaisun vaiheet oikeaan järjestykseen, joka oli D-A-C-E-B-F. Loput pareista laittoivat vaiheet väärään järjestykseen siten, että kaikilla pareilla ensimmäiset vaiheet D ja A olivat väärin päin muiden vaiheiden ollessa oikeassa järjestyksessä. Pari A muodosti aluksi väärän järjestyksen A-C-E-D-B-F, jonka he päätyivät vaihtamaan toiseen väärään järjestykseen, jossa ensimmäiset vaiheet olivat väärin päin.

Tehtävänannon mukaan yhtälönratkaisun vaiheiden järjestys tuli perustella asianmukaisia käsitteitä käyttäen. Perusteluissa tarvittavat käsitteet olivat pienin yhteinen jaettava eli pyj, sieventäminen, termien siirtäminen, yhteen- ja vähennyslaskut sekä jakaminen. Kaikki pareista ilmaisivat joko luonnollisella kielellä käydyissä keskusteluissa tai kirjallisissa perusteluissa yhteen- ja vähennyslaskut sekä jakamisen. Pari D oli ainut, joka muisti käsitteet pienin yhteinen jaettava sekä termien siirtäminen. Parien B ja E luonnollisella kielellä käydyistä keskusteluista tuli ilmi, etteivät he muistaneet täsmällisesti käsitettä pienin yhteinen jaettava, jolloin he päätyivät selittämään sen omin sanoin. Parin B keskustelu eteni seuraavasti:

> *B2: " Jos se kato tässä on niinku 4,3,2 (oppilas osoittaa laskuvaiheen D murtolukujen nimittäjiä) ja sitten miten ne voi kertoo kaikki et niistä tulee niin kun…"*
> *B1: "Saman verran (oppilas osoittaa laskuvaiheen A termien kertoimia, lukua 12)."*
> *B2: "Niin se on 12."*

Parin B oppilaat siis ymmärsivät mitä laskuvaiheessa D:stä A:han oli tehty, mutta he eivät muistaneet tarvittavaa käsitettä. Oppilas B2 selitti käsitteen pienin yhteinen jaettava omin sanoin, mitä oppilas B1 täydensi. Lopulta parin B kirjalliset perustelut kyseiseen kohtaan olivat ”*Murtoluvut kerrotaan*.”

Parin E oppilaat perustelivat järjestyksen vaiheesta D vaiheeseen A luonnollisella kielellä, koska he eivät ehtineet kirjoittaa perusteluja ajan loppumisen vuoksi. Parin E oppilaat muodostivat seuraavanlaisen selityksen:

> *E1: ”Sitä pienintä, pienintä sitä, mut siis sitä pienintä mikä se on se, tässä haetaanks sitä… Sitä, mie en muista sen nimmee, pienintä sitä jotanki, kun onko se...”*
> *E2: ”Pienintä jakajaa… tai kuitenkin jotain, jotain semmosta.”*
> *E1: ”Sitä, niin sitten sen takii tuohon ois jo tullu tuo (oppilas osoittaa laskuvaiheen A termien kertoimia, lukua 12) … 12. Että, kun tässä haetaan sitä, niin sen takia.”*

Parin keskusteluista tuli ilmi, että he muistelivat käsitettä pienin yhteinen jaettava ja ymmärsivät sen olevan laskuvaiheen A termien kertoimena. Vaikka parien omin sanoin muodostetut selityksen eivät olleen täysin korrekteja, oppilaat pystyivät kommunikoimaan ja ymmärsivät toistensa tulkinnat.

Oppilasparit keskustelivat vaiheiden järjestyksestä samalla perustellen ehdotuksiaan luonnollisella kielellä. Osalle pareista perustelujen kirjoittaminen osoittautui haastavaksi ja parin A kohdalla päädyin ohjaamaan heitä kirjoittamaan rohkeasti samoja asioita, joita olivat juuri sanoneet ääneen.

Jokainen oppilaspari perusteli yhtälönratkaisun vaiheita yhtälöissä esiintyneiden yksittäisten termien tai yhtälöiden ulkonäköjen perusteella. Esimerkkinä parit A ja E perustelivat vaiheet A:sta C:hen yksittäisen termin avulla parin A kirjoittaen ”*siinä on 36, joka tulee 12*3*” sekä parin C sanoen ”*Koska 12 kertaa yksi kahdesosaa on kuus*”.

Yhtälöiden ulkonäöissä parit kiinnittivät eniten huomiota laskuvaiheisiin A ja D. Vaihe A oli pisin yhtälö ja molemmat vaiheet A ja D sisälsivät murtolukuja. Parit C ja D sekä parin E oppilas E1 perustelivat laskuvaiheen A olevan ensimmäinen, koska se oli pisin kaikista. Tämän jälkeen pari D kuitenkin korjasi järjestystä ja perusteluja huomaten laskuvaiheen D olevan ensimmäinen. Parin E oppilas E2 oli ainut, joka pohti laskuvaiheen A olevan pisin ja monimutkaisin siksi, koska se voisi olla yhtälönratkaisun välivaihe. Pari F sekä parin B oppilas B1 perustelivat vaiheen D tulevan vaiheen A jälkeen, koska se sisälsi yhä jakolaskuja.

Laskuvaiheiden järjestystä perustellessa oppilasparit eivät edenneet kronologisesti ensimmäisestä laskuvaiheesta viimeiseen. Perusteluihin oli tarkoitus kirjoittaa syy, minkä vuoksi kyseinen välivaihe tuli tiettyyn kohtaan eli miten välivaiheissa edettiin. Kuvassa 10 on esitetty parin D ratkaisu, joka toimii esimerkkinä kyseisestä tilanteesta.

Järjestys (kirjain)	Perustelu
D	Siinä on vielä kertomattomat nimittäjät
A	Alkuperäisten nimittäjien pyj. on laitettu kertojaksi
C	termejä ei ole vielä siirretty
E	Termit on siirretty jo oikealle puolelle
B	Kun sen jakaa, saa tulokseksi F
F	Siinä ratkaisu valmina

Kuva 10: Oppilaspari D:n neljännen tehtävän ratkaisu

Pari D perusteli Kuvan 10 mukaan siirtymän vaiheesta D vaiheeseen A oikein, mutta siirtymää vaiheesta A vaiheeseen C ei perusteltu. Vaiheen C perustelut liittyivät seuraavaan vaiheeseen E eli termien siirtämiseen. Tällöin se, kuinka vaiheesta A päädyttiin vaiheeseen C, eli sieventäminen jäi perustelematta. Samanlainen aukko perusteluissa oli vaiheiden E ja B välillä eli vaiheen B perustelut liittyivät viimeiseen vaiheeseen F. Kaikkien oppilasparien perusteluissa riippumatta järjestyksen oikeellisuudesta oli vastaavanlaisia puutteita samoissa kohdissa.

Luku V

Pohdinta

5.1 Yhteenveto tuloksista

Tutkimukseen osallistuneilta oppilailta pyydettiin arviota matemaattisesta osaamisestaan. Arviointien perusteella voidaan todeta, että tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden matemaattinen osaaminen oli keskinkertaista tai sitä parempaa. Tutkimukseen ei osallistunut yhtään selvästi heikosti matematiikkaa osaavaa oppilasta. Oppilasparien välille syntyi tutkimuksen kannalta mielekästä dialogia, jonka aikana oppilasparit pääsivät esittämään tulkintojaan tehtävistä. Pienehkön otannan vuoksi tuloksia ei voida suoraan yleistää.

Ensimmäisen tehtävän osalta oppilailla havaittiin olevan hankaluuksia matematiikan symbolikielen tuottamisessa. Osa pareista ratkaisi tehtävän luonnollisen kielen avulla, mutta ratkaisun kuvaaminen paperille matemaattisin merkinnöin osoittautui haastavaksi. Toiset oppilaspareista muodostivat ratkaisumallin mukaisesti tehtäväpaperille lähtötilanteesta yhtälön. Oppilaiden yhtälönratkaisutaidoissa havaittiin eroavaisuuksia yhden oppilasparin ratkaistessa muodostamansa yhtälön väärin. Tehtävän vastauksia tarkastellessa oppilasparit, jotka ilmaisivat jossain vaiheessa ratkaisua, mitä merkitsivät muuttujalla x, päätyivät tehtävässä oikeaan vastaukseen. Oppilaspari, joka ei täsmentänyt muuttujan x kuvausta ratkaisun aikana, päätyi vastaamaan tehtävässä väärään asiaan. Oppilaiden ratkaisuissa oli huomattavissa puutteita yksikkötarkastelussa. Yksikään oppilaspareista ei osannut kääntää luonnollisella kielellä kirjoitettua litrahinnan määritelmää matemaattiseksi merkinnäksi.

Tehtävien suunnittelussa ensimmäisen tehtävän tehtävänantoon päätyi matemaattisesti epäselvä ilmaisu ”kolme kertaa enemmän”, jonka tarkoituksena oli ilmaista kolminkertaista määrää. Virheestä huolimatta oppilaat ymmärsivät tehtävänannon oletetusti alkuperäisen tarkoituksen mukaisesti. Virheellinen ilmaisu ei siis vaikuttanut saatuihin tutkimustuloksiin.

Toisessa tehtävässä kaikki oppilasparit, jotka pohtivat tarinaa, ymmärsivät, että tarina tuli muodostaa hyödyntäen yhtälössä olevia lukuja sekä muuttujaa x. Puolet oppilaspareista onnistui muodostamaan kirjallisesti luonnollisella kielellä tarinan tehtävässä annetulle symbolisella kielellä esitetylle yhtälölle. Yksi tarinoista jäi kirjalliselta tuotokseltaan keskeneräiseksi, mutta kyseisen oppilasparin keskustelusta havaittiin lopullista tarinaa täydentävä kysymys. Oppilasparien välillä todettiin vaihtelua valittujen ongelmanratkaisustrategioiden osalta. Osa pareista ratkaisi ensiksi yhtälön, jonka jälkeen pyrkivät muodostamaan pyydetyn tarinan yhtälöstä saadun ratkaisun avulla. Toiset lähestyivät tehtävänantoa muodostaen ensiksi pyydetyn tarinan ja sen jälkeen ratkaisten yhtälön. Jokainen oppilaspareista osasi ratkaista tehtävässä annetun yhtälön oikein matematiikan symbolikielellä.

Kolmannessa tehtävässä havaittiin oppilasparien etsivän yhtäläisyyksiä tehtävänannossa esitetyn taljan ja oppikirjoissa epäyhtälötehtävissä esiintyvien vaaka- kuvien välillä. Oppilasparit muistelivat oppikirjoissa esiintyvien vastaavanlaisten tehtävien ratkaisumalleja ja sovelsivat niitä tehtävän ratkaisussa. Oppilasparit, jotka tulkitsivat tehtävänannossa olevaa matematiikan kuviokielellä esitettyä taljaa luonnollisen kielen avulla, osoittivat ymmärtävänsä kuvassa olevan tilanteen ja päätyivät tehtävässä oikeaan vastaukseen. Kyseisillä oppilaspareilla esiintyi puutteita yksikkötarkastelussa etenkin vastauksen osalta. Tehtävässä tarvittava matematiikan symbolikielen hallinnassa havaittiin eroavaisuuksia oppilasparien välillä. Osalle pareista hankaluuksia tuottivat epäyhtälön ratkaisun mekaaniset välivaiheet, jonka lisäksi epäyhtälömerkin käyttö ja sen tulkitseminen luonnollisella kielellä osoittautuivat oppilaille haastaviksi.

Neljännessä tehtävässä jokaisen oppilasparin hyödyntämä ongelmanratkaisustrategia oli laskuvaiheissa eteneminen lopputilanteesta alkutilanteeseen. Oppilasparit, jotka onnistuivat laittamaan yhtälön ratkaisun laskuvaiheet oikeaan järjestykseen, hallitsivat myös suurimman osan perusteluissa tarvittavista asianmukaisista matemaattisista käsitteistä tai saivat selitettyä ne omin sanoin tarpeeksi ymmärrettävästi. Tämän lisäksi kaikkien parien osalta perusteluissa käytettiin hyväksi yhtälön ulkonäköä, eli yhtälössä esiintyviä yksittäisiä termejä tai niiden lukumäärää sekä yksittäisiä lukuja. Jokaisen oppilasparin osalta havaittiin myös epäjohdonmukaisuutta laskuvaiheidenvaiheiden perusteluissa, jolloin jokaiselle siirtymälle vaiheesta seuraavaan ei muodostunut selitystä.

5.2 Tutkimuskysymyksiin vastaaminen

Miten oppilasparien matemaattinen ajattelu ilmenee matemaattisen tiedon näkökulmasta tehtäviä ratkaistaessa?

Ensimmäinen tutkimuskysymys käsitteli oppilasparien matemaattisen ajattelun ilmentymistä kielentämisen näkökulmasta eli matemaattisen tiedon prosessointia. Matemaattisen tiedon katsotaan koostuvan konseptuaalisesta, proseduraalisesta ja strategisesta tiedosta. Oppilasparien välisestä keskustelusta havaittiin, kuinka oppilaat ymmärsivät annetun tehtävän ja kuinka he perustelivat ratkaisumalejaan parilleen. Oppilaiden tulkinnat ja niiden laajuus kertoivat oppilaiden kyvystä ymmärtää tehtävänanto ja hyödyntää tietoverkkojaan tehtävien ratkaisemiseen.

Joutsenlahden (2009, 2010) esittämien kirjallisen kielentämisen mallien avulla opettajilla voisi olla mahdollisuus saada parempi käsitys myös oppilaiden konseptuaalisesta tiedosta. Tutkimuksen tehtävät suunniteltiin hyödyntäen kyseisiä malleja ja etenkin neljännessä tehtävässä oppilaiden perustellessa matemaattiset vaiheet asianmukaisin käsittein oppilaiden tuli perustella matemaattiset proseduurit ja näin ollen tietoisesti ymmärtää mitä kussakin välivaiheessa tehtiin. Tuloksista oli nähtävissä, ketkä oppilaista ymmärsivät miksi ja millä perustein tiettyjä matemaattisia operaatioita voitiin suorittaa.

Tutkimuksessa oppilasparien käyttämät matemaattiset menetelmät ja säännöt liittyivät yhtälönratkaisussa tarvittaviin proseduureihin. Joutsenlahden (2005) mukaan proseduraalisen tiedon linkittyessä konseptuaaliseen tietoon proseduurien käyttö helpottuu ja esimerkiksi matemaattiset symbolit saavat ymmärrettävän merkityksen. Tuloksista havaittiin, että osa oppilaista osasi hyödyntää tarvittavia proseduureja joustavasti sekä tarkoituksenmukaisesti, mutta toisilla oppilaista oli hankaluuksia matemaattisissa säännönmukaisuuksissa sekä matemaattisten symbolien käytössä. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa vuosiluokkien 7-9 matematiikan opetuksen yhtenä tavoitteena on juurikin syventää matemaattisten käsitteiden ymmärrystä sekä luoda käsitteiden välisiä yhteyksiä (Opetushallitus, 2016). Opettajan rooli olisikin kiinnittää huomiota linkittämään matemaattiset menetelmät ja säännöt osaksi oppilaiden laajempaa tietoverkkoa.

Oppilaiden strateginen kyvykkyys havaittiin oppilaiden kyvyissä ymmärtää sekä laatia suunnitelma ja ratkaista ongelmanratkaisutehtävä. Oppilaat hyödynsivät tehtävien ratkaisuissa perinteisiä matematiikan ongelmanratkaisuun liittyviä strategioita, kuten yleisten matemaattisten sääntöjen käyttämistä. Kolmannessa tehtävässä oppilaat rinnastivat tehtävänannossa olleen taljan aiemmista kokemuksista tuttuihin oppitunneilla esiintyneisiin vaaka -tehtäviin. Neljännessä tehtävässä oppilaat oivalsivat lähestyä tehtävän ratkaisua edeten yhtälönratkaisun vaiheissa lopusta alkuun. Tämä oli yksi oppilaiden ennalta opituista strategiakeinoista aiemmilta matematiikan oppitunneilta. Oppilaat hyötyivät selvästi opitusta ongelmanratkaisustrategiasta. Erilaisia ongelmanratkaisustrategioita voidaankin opetella oppitunneilla esimerkkitehtävien avulla, jonka jälkeen oppilaiden on helpompi soveltaa opittua strategiaa uuteen ongelmatehtävään.

Kuinka oppilasparit käyttävät luonnollista kieltä, matematiikan symbolikieltä ja kuviokieltä tehtäviä ratkaistessa?

Toinen tutkimuskysymys liittyi matemaattisen ajattelun ilmaisemiseen Joutsenlahden ja Kuljun (2010) esittämään kolmen kielen mallin mukaisesti. Oppilasparien välistä keskustelua tarkastelemalla saatiin seurattua oppilaiden ajatusprosesseja ja tuloksista huomattiin suullisen kielentämisen merkityksellisyys osana tehtävien ratkaisua. Oppilaita rohkaistiin ajattelemaan ääneen, jolloin molemmat parin oppilaista hyötyivät toistensa pohdinnoista. Oppilas, joka ajatteli ääneen, joutui jäsentelemään matemaattista ajatteluaan ja pukemaan ajatustensa keskeiset piirteet toiselle ymmärrettävään merkitykselliseen muotoon. Samalla toinen oppilas vertasi kuulemaansa omaan käsitteen sisältöönsä ja mahdollisesti muokkasi joko omaa tai toisen oppilaan ajatusmalliaan kyseisestä käsitteestä. Tällainen pari- ja ryhmätyöskentely tuki oppilaiden oppimista ja matemaattisen ajattelun kehittymistä.

Yhtenä matematiikan opetuksen tavoitteista onkin oppilaiden yhteistoiminnallinen työskentely. Sen tavoitteena on tulkita ja ratkaista ongelmia sekä kehittää oppilaiden yhteistyö- ja vuorovaikutustaitoja. (Opetushallitus, 2016) Suullisen kielentämisen haittana oppilaiden välisissä keskusteluissa voivat olla väärät tulkinnat, jolloin kumpikaan dialogiin osallistuneista oppilaista ei huomaa muodostuneen mallin virheellisyyttä. Mikäli opettaja ei pääse korjaamaan tulkintoja, oppilaiden luoma virheellinen malli voi jäädä käyttöön. Näin ollen opettajalta vaaditaan aktiivista osallistumista ja kuuntelua oppilaiden välillä käymiin keskusteluihin.

Oppilaiden luonnollisella kielellä käydyistä keskusteluista hyötyy oppilaiden lisäksi myös opettaja, jonka yhtenä tehtävä on arvioida oppilaan osaamista ja ohjata häntä kehittämään matemaattista osaamistaan. Tutkimuksessa havaittiin oppilaiden ratkaisevan tehtävä tai täydentävän tehtävän vastauksia suullisesti, kuitenkaan kirjoittamatta näitä tehtäväpaperille ylös.

Tuloksissa havaittiin myös hankaluuksia luonnollisen kielen kääntämisessä matematiikan symbolikielelle. Symbolikielen hallinnassa havaittiin eroavaisuuksia oppilasparien välillä. Osalle pareista matemaattisten merkintöjen, kuten yhtäsuuruus- ja epäyhtälömerkin käyttö oli sujuvaa. Osalle oppilaista symbolien oikeaoppinen merkintä tuotti hankaluuksia. Etenkin yksikkötarkastelun osalta symbolikielen hallinnassa havaittiin parannettavaa jokaisella oppilasparilla.

Matematiikan työtapoihin liittyen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa rohkaistaan oppilaita hyödyntämään piirroksia ja välineitä osana matematiikan opiskelua (Opetushallitus, 2016). Kuviokielen osalta tutkimuksessa havaittiin, että vain yksi oppilaspari käytti piirtämistä hyödyksi osana yhden tehtävän ratkaisua. Kuviokielen käyttö vaikutti siis olevan vierasta oppilaille osana tehtävien tekoa.

5.3 Kokoavia johtopäätöksiä ja jatkotutkimusehdotuksia

Tutkimuksesta saatujen tulosten perusteella voidaan todeta, että mikäli oppilaan matemaattista osaamista arvioidaan vain paperille kirjoitetun tuotoksen avulla, voi oppilaan todellinen osaaminen jäädä huomiotta. Joutsenlahti (2009) toteaa perusopetuksen oppimateriaalien koostuvan pääsääntöisesti ”standardi”- mallin mukaisista tehtävistä, joissa pääpaino on matemaattisen symbolikielen tuotossa. Monipuoliset tehtävät, jotka koostuisivat useamman kielen käytöstä, antaisivat oppilaille mahdollisuuden ilmaista matemaattista ajatteluaan heille luonnollisimmalla tavalla. Tällöin myös opettaja saisi tärkeää tietoa oppilaiden matemaattisesta ajattelusta osaksi formatiivista arviointia ja ohjausta.

Jotta oppilaat oppisivat eri tapoja esittää matemaattista ajatteluaan, eri kielentämisen muotoja tulisi aktiivisesti harjoitella osana opetusta ja opiskelua. Kielentämistä voi harjoitella esimerkiksi pitäen lähtökohtana yksittäistä kieltä. Joutsenlahti ja Tossavainen (2018) esittelevät ideoita kaikkien kolmen kielen harjoittelun tueksi. Esimerkiksi luonnollisen kielen kohdalla oppilaat voisivat pelata ”käsite-aliasta” matemaattisilla käsitteillä tai harjoitella sanallisten tehtävien ratkaisujen kirjoittamista eri kirjallisen kielentämisen mallien avulla. Symbolikielen harjoittelussa toimii esimerkiksi tutkimuksessa ollut tehtävä kaksi, jossa oppilaan tuli ymmärtää symbolisella kielellä ollut yhtälö ja siinä olevat käsitteet ja toisaalta liittää ne luontevasti valitsemaansa kontekstiin.

Kuviokielen hyödyt tulevat esille esimerkiksi geometrian osa-alueessa, jolloin kuvioiden piirtäminen auttaa oppilasta hahmottamaan geometriset kuviot. Kuvioiden avulla voidaan myös selventää luonnollisella- ja symbolikielellä esitetyt asiat ymmärrettävämpään muotoon. Kuviokielen osuutta voitaisiin lisätä oppitunneitta esimerkiksi tehtävissä, joissa oppilaat laatisivat itse laskutehtäviä virheellisesti piirretyistä kuvista etsien niihin ratkaisut (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018).

Perusopetuksen opetussuunnitelman (Opetushallitus, 2016) mukaisesti perusopetuksessa ollaan siirtymässä inkluusioon, jonka tarkoituksena on taata kaikille lapsille yhdenvertainen peruskoulu. Yhtenäisessä peruskoulussa erityisopetusta saava lapsi on tarkoitus integroida osaksi yleisopetusta ja näin ollen päästä eroon erityiskouluista sekä erityisluokista. Tämän myötä erilaisten oppijoiden kirjo lisääntyy perusopetuksen ryhmissä, jolloin opetuksenkin on mukauduttava vastaamaan oppilaiden erilaisuuteen. Kielentämisen avulla pystytäänkin harjoittelemaan erilaisia keinoja ilmaista omia ajatuksia. Erilaisten ilmaisun muotojen avulla jokainen oppilas voi löytää itselleen suotuisimman keinon tuoda ilmi omaa ajatteluaan niin matematiikan kun muidenkin oppiaineiden osalta.

Erilaista oppimisen tukea saavien oppilaiden määrä on lisääntynyt viimevuosina huomattavasti (ks. Tilastokeskus, 2018). Tuen tarkoituksena on taata jokaiselle oppilaalle tarvittava yksilölliset tarpeet huomioon ottava koulunkäynnin tuki. Oppilaiden oppimista sekä koulunkäyntiä seuraamalla havaitaan mahdolliset tukea tarvitsevat oppilaat (Opetushallitus, 2016). Oppimiseen kuuluvat matematiikan osalta etenkin matemaattisten menetelmien sekä käsitteiden hallinta ja toisaalta tietoinen oman toiminnan ymmärtäminen. Seuraamalla oppilaiden matemaattisen ajattelun kehittymistä, opettajalla on mahdollisuus havainnoida oppilaan ajattelussa esiintyviä virheitä ja puutteita.

Toisaalta opettajalla on myös mahdollisuus auttaa tukea tarvitsevaa oppilasta antaen oppilaalle keinoja ilmaista matemaattista ajatteluaan eri kielen keinoin.

Teknologian tullessa yhä tärkeämmäksi osaksi yhteiskuntaa, myös matematiikan opetuksen on kehityttävä mukana. Uudet laskinsovellukset tuovat mukanaan mahdollisuuksia ilmentää matematiikkaa myös dynaamisesti. Näin ollen myös matemaattisen ajattelun ilmaiseminen kuvien ja kuvioiden keinoin helpottuu ja monipuolistuu. Suurimpana esimerkkinä lienee sähköistyneet ylioppilaskokeet, joiden myötä myös matematiikan tehtävien ratkaisuihin on yhä helpompi liittää laskujen lisäksi ajattelua selittäviä kuvia sekä tekstejä. Oppilailla onkin yhä enemmän mahdollisuuksia tuoda esille ajatusketjujaan ja esittää omaa ymmärrystä aihealueesta.

Tässä tutkimuksessa matematiikan kielentämistä havainnoitiin kahdeksannen luokan oppilaiden osalta. Jatkoa ajatellen tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden määrää laajentamalla saataisiin kattavampi käsitys kielentämisen taidoista, myös heikommin matematiikkaa osaavien oppilaiden osalta. Tutkimus toteutettiin parihaastatteluna, joten tutkimustilanne ei vastannut normaalia matematiikan oppituntia. Jatkossa voisikin olla mielekästä tehdä havaintoja oppilaiden matemaattisen ajattelun ilmenemisestä oppituntien aikana, jolloin tulokset vastaisivat autenttiseen opetustilanteeseen.

Tuloksista nähtiin oppilaiden hyödyntävän eri kieliä melko rajallisesti, etenkin kuviokieltä. Oppilaat oppivat opettajalta taitonsa esittää matemaattista ajatteluaan. Aiempien tutkimusten (muun muassa Joutsenlahti, 2003b, 2004, 2010) valossa voidaan todeta opettajienkin hyötyvän oppilaan matemaattisen ajattelun kielentämisestä. Tulevaisuudessa olisikin mielekästä tutkia kuinka paljon opettajat hyödyntävät eri kieliä osana opetusta. Toisaalta tilannetta voitaisiin tutkia myös opettajan koulutuksen kannalta, kuinka paljon opettajat ovat itse saaneet tietoa ja oppeja matematiikan opetukseen kielentämisen näkökulmasta.

Tämän tutkimuksen ja edeltävien ajatusten myötä voidaankin todeta, että matemaattisen ajattelun esittäminen on tulevaisuudessakin tärkeässä roolissa. Niin osana matematiikan opetusta sekä oppimista kuin osana yhteiskunnallista kehitystä. Omien ajatusten esille tuominen auttaa toimimaan yhteisöissä sekä toisaalta ymmärtämään toisten näkökulmia paremmin.

Lähteet

Haapasalo, L. (2005). *Oppiminen, tieto ja ongelmanratkaisu* (8. p.). Joensuu: Medusa-Software.

Hirsjärvi, S.;& Hurme, H. (2001). *Tutkimushaastattelu, Teemahaastattelun teoria ja käytäntö.* Helsinki: Yliopistopaino.

Joensuun kaupunki. (2016). *Joensuun seudun OPS2016*. Haettu 6. 11. 2019 osoitteesta https://peda.net/opetussuunnitelma/ops2016/opetussuunnitelmat/jspo/l1ov7/ov7/matematiikka/motsjav7jso

Joutsenlahti, J. (2003a). Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa A. Virta;& O. Marttila (toim.), *Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta (Ainedidaktinen symposium 7.2.2003)* (ss. 188-196). Turku: Turun opettajankoulutuslaitos.

Joutsenlahti, J. (2003b). Matemattinen ajattelu ja kieli - mielenkiintoinen ulottuvuus uudessa opetussuunnitelmassa. Teoksessa A.-L. Aalto;& T. Tammi (toim.), *Projekteja ja prosesseja - opetuksen käytäntöjä matematiikassa ja viestinnässä* (Hämeenlinnan normaalikoulun julkaisja nro 8 p., ss. 3-12). Tampere: Hämeenlinnan normaalikoulu.

Joutsenlahti, J. (2004). Matemaattinen ajattelu lukiossa. Teoksessa P. Räsänen;P. Kupari;T. Ahonen;& P. Malinen (toim.), *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (2 p., ss. 363-380). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Joutsenlahti, J. (2005). *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä : 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä.* Tampere: Tampere University Press.

Joutsenlahti, J. (2009). Matematiikan kielentäminen kirjallisessa työskentelyssä. Teoksessa R. Kaasila (toim.), *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Rovaniemellä 7.-8.11.2008* (ss. 71-86). Rovaniemi: Lapin Yliopistopaino.

Joutsenlahti, J. (2010). Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa. Teoksessa M. Asikainen;P. E. Hirvonen;& K. Sormunen (toim.), *Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa* (ss. 3-15). Joensuu: Kopijyvä.

Joutsenlahti, J.;& Kulju, P. (2010). Kieliteoreettinen lähestymistapa kolumatematiikan sanallisiin tehtäviin ja niiden kielennettyihin ratkaisuihin. Teoksessa E. Ropo;H. Silfverberg;& T. Soini (toim.), *Toisensa kohtaavat ainedidaktiikat. Ainedidaktiikan symposiumi Tampereella 13.2.2009* (ss. 77-90). Tampere: Tampereen yliopistopaino Oy.

Joutsenlahti, J.;& Rättyä, K. (2015). Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Teoksessa M. Kauppinen;M. Rautiainen;& M. Tarnanen (toim.), *Rajaton tulevaisuus - Kohti kokonaisvaltaista oppimista* (ss. 45-62). Jyväskylä: Suomen ainedidaktinen tutkimusseura ry.

Joutsenlahti, J.;& Tossavainen , T. (2018). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. Teoksessa J. Joutsenlahti;H. Silfverberg;& P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (ss. 410-431). Porvoo: Niilo Mäki Instituutti.

Koppinen, M.-L.;Lyytinen , P.;& Rasku-Puttonen, H. (1989). *Lapsen kieli ja vuorovaikutustaidot.* Rauma: Tekijät ja Kirjayhtymä Oy.

Leppäaho, H. (2007). *Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa - ongelmaratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi.* Jyväskylä: Jyväskylä University Prnting House.

Mansikka-aho, J.;& Sirén, S. (2012). *"Päinvastasesti ku supistaminen" Matematiikan suullinen kielentäminen peruskoulun alaluokilla.* Kasvatustieteiden yksikkö. Hämeenlinna: Tampereen yliopisto. Haettu 27. 1. 2020 osoitteesta https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/83792/gradu06081.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ojanen, S. (2016). *Kirjallinen kielentäminen yliopiston matematiikan opteuksessa.* Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta. Helsinki: Helsingin yliopisto. Haettu 27. 1. 2020 osoitteesta https://helda.helsinki.fi/bitstream/handle/10138/161386/ProGraduOjanen.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Opetushallitus. (2015). Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015. Helsinki. Haettu 27. 1. 2020 osoitteesta https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf

Opetushallitus. (2016). Perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteet 2014. (4. painos). Helsinki. Haettu 4. 12. 2019 osoitteesta https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf

Pajari, K. (2019). Vuoden jutut: Osaatko ratkoa nämä Kiinan kuusivuotiaiden matematiikan tehtävät? *Helsingin Sanomat*. Haettu 23. 1. 2020 osoitteesta https://www.hs.fi/ulkomaat/art-2000005955375.html

Pehkonen, E. (2003). Tutkiva matematiikan oppiminen peruskoulussa. *Tieteessä tapahtuu, 21*(6). Haettu 19. 10. 2019 osoitteesta https://journal.fi/tt/article/view/57322/19355

Pehkonen, E. (2009). Matemaattisen ongelmaratkaisun tutkimuksesta ja toteutuksesta suomen peruskoulussa. Teoksessa R. Kaasila (toim.), *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Rovaniemellä 7.-8.11.2008* (ss. 105-119). Rovaniemi: Lapin Yliopisto.

Saaranen-Kauppinen, A.;& Puusniekka, A. (2006). *KvaliMOTV - Menetelmäopetuksen tietovaranto*. Haettu 14. 1. 2020 osoitteesta https://www.fsd.uta.fi/menetelmaopetus/

Tilastokeskus. (2018). Suomen virallinen tilasto (SVT): Erityisopetus. Helsinki. Haettu 18. 2. 2020 osoitteesta https://www.stat.fi/til/erop/2018/erop_2018_2019-06-19_tie_001_fi.html

Ylioppilastutkintolautakunta. (2019). *Matematiikan digitaalisen kokeen määräykset.* Haettu 23. 1. 2020 osoitteesta https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Ohjeet/Koekohtaiset/fi_maaraykset_matematiikka_digitaalinen_koe.pdf

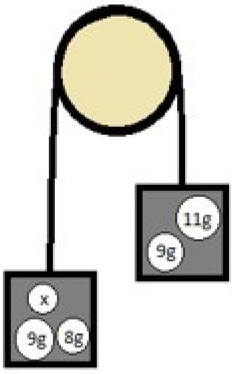
Yrjönsuuri, R. (2004). Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa P. Räsänen;P. Kupari;T. Ahonen;& P. Malinen (toim.), *Matematiikka - näkökulmia opettamieen ja oppimiseen* (2 p., ss. 111-122). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Liite A
Tehtävämoniste

1. Ville poimi äitinsä kanssa mustikoita myyntiin. Ville keräsi kolme kertaa enemmän mustikoita kuin äitinsä. Yhteensä he keräsivät 8 litraa. Yksi litra mustikoita myytiin 4 euron litrahintaan. Paljonko Ville sai rahaa keräämistään mustikoista?

2. Muodosta yhtälölle $4 + x + x = 10$ suullisesti tai kirjallisesti tarina/tehtävänanto ja ratkaise yhtälö.

3. Kirjoita kuvan esittämä tilanne epäyhtälönä ja ratkaise se.



4. Laita seuraavat yhtälönratkaisun vaiheet oikeaan järjestykseen ja perustele/kuvaa kukin vaihe asianmukaisia käsitteitä käyttäen alempaan taulukkoon.

	Laskuvaihe
A	$12 \cdot \frac{2x}{4} - 12 \cdot 3 = 12 \cdot \frac{x}{3} + 12 \cdot \frac{1}{2}$
B	$2x = 42$
C	$6x - 36 = 4x + 6$
D	$\frac{2x}{4} - 3 = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$
E	$6x - 4x = 6 + 36$
F	$x = 21$

Järjestys (kirjain)	**Perustelu**